

П. А. МИШНАЕВСКИЙ

**ФУНКЦИЯ ГРИНА И АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ  
СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРНОЙ ЗАДАЧИ  
ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ**

(Представлено академиком И. Г. Петровским 30 IX 1971)

1. Пусть  $E$  — банахово пространство и  $P(t)$  — сильно непрерывное в нем семейство ограниченных проекционных операторов  $P(t): P^2(t) = P(t)$ ,  $\|P(t)\| \leq C$ . Через  $E(t)$  обозначим подпространства, являющиеся областью значений оператора  $P(t): E(t) = P(t)E$ . Пусть при каждом  $x \in J = (-\infty, \infty)$  задан линейный замкнутый оператор  $Q(x)$ , действующий в пространстве  $E(x)$ , определенный на плотном в  $E(x)$  множестве  $D(Q(x))$ . В секторе комплексной плоскости  $\Sigma = \{\lambda: |\arg \lambda| \leq 1/2\pi + \theta, \theta > 0\}$  существует резольвента  $R_x(\lambda) = (Q(x) + \lambda I(x))^{-1}$  оператора  $Q(x)$  в пространстве  $E(x)$  и  $\|R_x(\lambda)\|_{E(x)} \leq M / (1 + |\lambda|)$ . Каждому ограниченному оператору  $B(x)$ , действующему в  $E(x)$ , поставим в соответствие его продолжение на все  $E$  по формуле  $\tilde{B}(x) = B(x)P(x)$ .

Рассмотрим уравнение

$$l(y) = -y'' + Q(x)y = f(x), \quad x \in J, \quad (1)$$

$f(x)$  — заданная непрерывная функция со значениями в  $E(x)$ . Операторную функцию  $G(x, s)$  будем называть функцией Грина уравнения (1), если она удовлетворяет следующим условиям: 1) для любой функции  $f(x)$  со значениями в  $E(x)$ , удовлетворяющей в  $E$  условию Гельдера и равно-

мерно ограниченной при  $x \in J$ , интеграл  $y = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, s) f(s) ds$  дает частное решение уравнения (1) \*, 2) существует сильная производная  $\frac{\partial G}{\partial x}(x, s)$  и

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, x-0) - \frac{\partial G}{\partial x}(x, x+0) = -P(x).$$

На операторы  $Q(x)$  и  $P(x)$  наложим следующие ограничения:

1) при  $v \in D(Q^{1/2}(x)) \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} v = 0;$

2)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \tilde{Q}^{-1}(x) \left( \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \right) w = 0, \quad w \in E;$

3) оператор  $\tilde{Q}^{-1}(x)$  дважды сильно непрерывно дифференцируем по  $x$ ;

4)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial \tilde{Q}^{-1}}{\partial x} \left( \frac{P(x + \Delta x) - P(x)}{\Delta x} \right) w = 0, \quad w \in E;$

\* Функцию  $y(x) \in E(x)$ , определенную на  $J$ , будем называть решением уравнения (1), если:

- 1)  $y(x)$  — сильно непрерывна на  $J$ ,  $\sup \|y(x)\|_E < \infty$ ,
- 2)  $y(x) \in D(Q^{1/2}(x))$ , а  $y' \in D(Q^{1/2}(x))$ ,
- 3)  $y(x)$  удовлетворяет уравнению (1) на  $J$ .

5) продолжение резольвенты  $\tilde{R}_{Q(x)}(\lambda)$  дважды сильно дифференцируемо по  $x$  и  $\lambda \in \Sigma$ ,

$$\left\| \frac{\partial}{\partial x} \tilde{R}_{Q(x)}(\lambda) \right\| \leq \frac{N}{|\lambda|^{1/2+\varepsilon}}, \quad \left\| \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tilde{R}_{Q(x)}(\lambda) \right\| \leq \frac{N_1}{|\lambda|^\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon < 1/2;$$

6) первая и вторая производные функции  $\tilde{Q}^{-1}(x)$  удовлетворяют условию Гёльдера

$$\left\| \frac{\partial \tilde{Q}^{-1}(x)}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{Q}^{-1}(s)}{\partial s} \right\| \leq R|x-s|^\gamma,$$

$$\left\| \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{-1}(x)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \tilde{Q}^{-1}(s)}{\partial s^2} \right\| \leq R|x-s|^\gamma, \quad 0 < \gamma \leq 1.$$

**Теорема 1.** При выполнении условий 1)–6) \* существует функция Грина уравнения

$$-y'' + (Q(x) + k^2 I(x))y = f(x) \quad (1')$$

(если положительное число  $k$  достаточно велико).

Теорема доказывается по методу работы (1). Функцию Грина ищем в виде

$$G(x, s, k) = \tilde{g}(x, s, k) P(s) + \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{g}(x, \tau, k) \Phi(\tau, s, k) d\tau,$$

$$\tilde{g}(x, s, k) = 1/2 \exp[-(Q(x) + k^2 I(x))^{1/2} |x-s|] (Q(x) + k^2 I(x))^{-1/2} P(x).$$

Отсюда для  $\Phi(\tau, s, k)$  получаем интегральное уравнение

$$\Phi(\tau, s, k) = K(\tau, s, k) P(s) + \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau, n, k) \Phi(n, s, k) dn, \quad (2)$$

$$K(t, s, k) = \frac{\partial^2 \tilde{g}(t, s, k)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{g}(t, s, k)}{\partial s^2}.$$

**З а м е ч а н и е 1.** Теорема 1 остается справедливой, если в ее условиях оператор  $Q(x)$  заменить оператором  $Q^{1/2}(x)$ .

**З а м е ч а н и е 2.** В случае, когда  $E$  и  $E(x)$  — гильбертовы пространства, можно доказать существование функции Грина для уравнения (1).

2. Пусть теперь  $Q(x)$  — положительно определенный самосопряженный оператор с вполне непрерывным обратным. Обозначим через  $a_i(x)$  его собственные значения в порядке их роста и пусть для них выполняется условие

$$\sum_i a_i^{-1.5}(x) = F(x), \quad \int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx < \infty. \quad (3)$$

Можно показать, что для оператора  $l$  существует самосопряженное расширение по Фридрихсу  $L$ , имеющее дискретный спектр с единственной предельной точкой на бесконечности. Обозначим через  $N(\lambda)$  число собственных значений оператора  $L$ , меньших данного числа  $\lambda$ . При выполнении условия (3.3) из работы (2) для  $N(\lambda)$  получается следующая асимптотическая формула:

$$N(\lambda) = \frac{1}{\pi} \sum_i \int_{a_i(x) < \lambda} (\lambda - a_i(x))^{1/2} dx.$$

Уравнение (1) в случае  $E(x) = E$  изучалось в работах (3, 4). Асимптотическая формула для  $N(\lambda)$  была получена в этом случае в работе А. Г. Костюченко и Б. М. Левитана (2).

\* Условия 1) — 6) вычисляются для равномерно эллиптических операторов порядка  $2m$ ,  $m \geq 2$ , действующих в областях  $G_x \subset \bar{G}$ , где  $G$  — область пространства  $R_n$  (см. (1)).

3. Рассмотрим теперь в гильбертовом пространстве  $H$  полное операторное уравнение Штурма — Лиувилля

$$(-P_0(x)y')' + Q(x)y = 0, \quad (4)$$

где  $Q(x)$  и  $P_0(x)$  — положительно определенные самосопряженные операторы, удовлетворяющие следующим условиям:

1')  $m(f, f)_H \leq (P_0(x)f, f)_H \leq M(f, f)_H$ ,  $f \in H$ ,  $m$  и  $M$  — постоянные положительные числа;

2') операторная функция  $P_0(x)$  сильно непрерывно дифференцируема;

3') оператор  $Q(x)$  имеет для каждого  $x \in J$  плотную область определения  $D(Q(x))$  в  $H$  и удовлетворяет условиям 5), 6) и оценке на резольвенту из теоремы 1;

4')  $P_0^{-1/2}(x)D(Q(x)) \in D(Q(x))$ ;

5')  $P_0(x)$  и  $P_0'(x)$  удовлетворяют условию Гёльдера.

При выполнении условий 1')—5') \* для уравнения (4) справедлива теорема 1, причем роль функций  $g(x, s, k)$  и  $K(x, s, k)$  играют функции

$$g^*(x, s, k) = P_0^{-1/2}(x) \exp[-(P_0^{-1/2}(x)Q(x)P_0^{-1/2}(x) + k^2P_0^{-1}(x))^{1/2}|x-s|] \times \\ \times (P_0^{-1/2}(x)Q(x)P_0^{-1/2}(x) - k^2P_0^{-1}(x))^{-1/2}P_0^{-1/2}(x),$$

$$K^*(x, s, k) = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( P_0(x) \frac{\partial}{\partial x} g^*(x, s, k) \right) - \frac{\partial}{\partial s} \left( P_0(x) \frac{\partial}{\partial s} g^*(x, s, k) \right) \right].$$

Будем предполагать, что  $Q(x)$  для каждого  $x$  является обратным к вполне непрерывному оператору. Обозначим через  $K_0(x)$  и  $W(x, k)$  операторы  $P_0^{-1/2}Q(x)P_0^{-1/2}(x)$  и  $(K_0(x) + k^2P_0^{-1}(x))^{1/2}$ , также являющиеся обратными к вполне непрерывным операторам. Пусть для собственных значений  $B_i(x)$  оператора  $K_0(x)$  выполняется неравенство (3) и, кроме того,  $B_1(x) \geq 1$ .

Теорема 2. При выполнении условий 1')—5') и неравенства (3) существует функции Грина уравнения (4) (в смысле (8)). Кроме того  $G(x, n, k)$  принадлежит банаховым пространствам  $X_1, X_2, X_3$ , определенным в работе (3) при достаточно больших  $k$ .

Теорема 2 доказывается с помощью интегральных уравнений

$$G(x, n, k) = g^*(x, n, k) + \int_{-\infty}^{\infty} g^*(x, s, k) \Phi(s, n, k) ds,$$

$$\Phi(s, n, k) = K^*(s, n, k) + \int_{-\infty}^{\infty} K^*(s, \tau, k) \Phi(\tau, n, k) d\tau$$

по методу теоремы 1 и работы (2).

Нам понадобятся пространства  $\tilde{X}_1^s, \tilde{X}_2^s, \tilde{X}_4^s$ ,  $s \geq 0$ , операторных функций  $A(x, n)$  в  $H$ , в которых нормы определяются следующим образом:

$$\|A(x, n)\|_{\tilde{X}_1^s}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|Q^s(x)A(x, n)\|^2 dn \right\},$$

$$\|A(x, n)\|_{\tilde{X}_2^s}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \|Q^s(x)A(x, n)\|_2^2 dn \right\},$$

$$\|A(x, n)\|_{\tilde{X}_4^s}^2 = \sup_{n \in I} \int_{-\infty}^{\infty} \|Q^s(x)A(x, n)\| dx.$$

Можно показать, что  $G(x, n, k) \in \tilde{X}_1^s, \tilde{X}_2^s$  и  $\tilde{X}_4^s$  если только для ряда  $\sum B_i^{-1,5+2s}(x)$  выполнено неравенство (3).

\* Из (5) следует, что условия 3')—5') в случае, когда  $Q(x)$  — эллиптический оператор порядка  $2m$ , удовлетворяются при достаточной гладкости и равномерной ограниченности коэффициентов  $Q(x)$  и граничных условий.

4. Рассмотрим задачу на собственные значения для уравнения

$$-(P(x)y')' + Q(x)y - \lambda s(x)y = 0, \quad (5)$$

где  $P_0(x)$  и  $s^{1/2}(x)Q(x)s^{-1/2}(x)$  удовлетворяют условиям теоремы 2,  $s(x)$  — положительно определенный самосопряженный оператор,  $d_i(u, u)_H \geq (s(x)u, u)_H \geq \alpha(u, u)_H$ ,  $-\infty > d_1 \geq \alpha > 0$ ;  $s(x)$  сильно непрерывно дифференцируем.

Можно показать, что при этих предположениях имеет место формула

$$\int_0^\infty \frac{N(\lambda)}{(\lambda + \mu)^3} d\lambda = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \|g^{**}(\xi, x, \sqrt{\mu})\|_2^2 d\xi dx + o\left(\sum_1 \frac{1}{(\lambda_n + \mu)^2}\right),$$

$$g^{**}(\xi, x, \mu) = s^{1/2}(\xi) P_0^{-1/2}(\xi) \exp[-(K_0(\xi) + \mu P_0^{-1/2}(\xi) s(\xi) P_0^{-1/2}(\xi))^{1/2} |\xi - x|] \times \\ \times (K_0(\xi) + \mu P_0^{-1/2}(\xi) s(\xi) P_0^{-1/2}(\xi))^{-1/2} P_0^{-1/2}(\xi) s^{1/2}(\xi).$$

Замечание 3. Подобная формула имеет место и для уравнения

$$-(P_0(x)u')' + Q(x)u + 2iB(x)u' - \lambda s(x)u = 0,$$

где  $B(x)$  — самосопряженный оператор,  $Q(x) - B(x)P_0(x)B(x) \geq 0$  при некоторых дополнительных условиях на  $Q(x)$  и  $B(x)$ . Параметрикс  $g^{**}(\xi, x, \sqrt{\mu})$  в этом случае имеет вид

$$g^{**}(\xi, x, \sqrt{\mu}) = s^{1/2}(\xi) P_0^{-1/2}(\xi) \exp[i\bar{B}(\xi) \operatorname{sgn} |\xi - x| - \\ - (\bar{K}_0(\xi) + \mu \bar{s}(\xi))^{1/2} |\xi - x|] \times (-iB(\xi) \operatorname{sgn} |\xi - x| + \\ + (\bar{K}_0(\xi) \mu \bar{s}(\xi))^{1/2} P_0^{-1/2}(\xi) s^{1/2}(\xi)),$$

$$\bar{B}(\xi) = P_0^{-1/2}(\xi) B(\xi) P_0^{-1/2}(\xi), \quad \bar{s}(\xi) = P_0^{-1/2}(\xi) s(\xi) P_0^{-1/2}(\xi),$$

$$\bar{K}_0(x) = K_0(x) - \bar{B}^2(x).$$

Из теоремы 2 следует, что условия 5), 6), 7) теоремы 1 Абдукадырова (см. (6)) можно заменить более легко проверяемыми условиями 3), 4), 5) теоремы 2.

5. Рассмотрим теперь в цилиндре  $\Pi = \Pi$ ,  $(y, z) \in \Omega$ ,  $x \in J$ , где  $\Omega$  — плоская односвязная область с ляпуновской границей  $\Gamma$ , задачу на собственные значения для оператора

$$-\sum_1^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left( P_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} u \right) + q(x)u = \lambda s(x)u,$$

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad \bar{x} = (x_1, x_2, x_3); \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x)u = 0, \quad \sigma(x) > 0.$$

Пусть выполнены следующие условия:  $\sigma(x)$ ,  $p_i(x)$ ,  $s(x)$  — положительно равномерно ограниченные снизу и сверху функции на  $\Pi$ , достаточно гладкие;  $q(x, y, z)$  удовлетворяет условиям работы (6). Тогда (с использованием работы (8)) можно для  $N(\lambda)$  получить асимптотическую формулу

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{6\pi^2} \iiint_{q/s < \lambda} \left( \prod_{i=1}^3 p_i \right) s^{3/2} (\lambda - q/s)^{3/2} dx_1 dx_2 dx_3.$$

В заключение выражаю глубокую благодарность Б. М. Левитану за постановку задачи и внимание к работе и В. В. Жикову за обсуждение результатов и внимание к работе.

Центральный научно-исследовательский  
институт связи  
Москва

Поступило  
15 IX 1971

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. Г. Крейн, Г. И. Лалтев, Дифференциальные уравнения, 5, № 8, 1458 (1969). <sup>2</sup> А. Г. Костюченко, Б. М. Левитан, Функциональный анализ и его приложения, 1, в. 1 (1967). <sup>3</sup> Б. М. Левитан, Математич. сборн., 76, № 2, 239 (1968). <sup>4</sup> Г. И. Лалтев, Литовск. матем. сборн., 8, № 1, 87 (1968). <sup>5</sup> Н. Tanabe, J. Math. Soc. Japan, 19, № 4, 538 (1967). <sup>6</sup> Э. Абдукадыров, ДАН, 195, № 3, 519 (1970). <sup>7</sup> S. G. Krein, Studia Mathematica, 31, 527 (1968). <sup>8</sup> Б. М. Левитан, А. Г. Рамм, Математические заметки, 1, № 5, 596 (1967).