Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 6

УДК 517.815.2 *МАТЕМАТИКА*

Ю. Л. РОДИН

ВТОРАЯ ПРОБЛЕМА КУЗЕНА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ БЕСКОНЕЧНОГО РОДА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 X 1971)

В настоящей работе мы обычными когомологическими методами исследуем на параболических римановых поверхностях вопросы, группирующиеся вокруг второй проблемы Кузена. Основная трудность здесь заключается в том, что на многообразиях Штейна необходимые для этого исследования группы когомологий оказываются тривиальными (принцип Ока). Для того чтобы обойти эту трудность, мы используем обычный в теории открытых римановых поверхностей прием: накладываем на рассматриваемые объекты какие-либо условия конечности (например, конечность интеграла Дирихле).

В работе рассматривается класс римановых поверхностей, обладающих таким нормальным исчерпанием $M_n \searrow M$ (мы называем его каноническим), что каждая компонента l_n^ν границы $l_n = \partial M_n$ разбивает поверхность и экстремальная длина семейства кривых $\{l_n\}$ равна нулю (класс O'' в работе [3]; если ограничиться только вторым требованием, мы придем к несколько более широкому классу O_G поверхностей с нулевой границей).

Фиксируется некоторое локально-конечное покрытие U, V, $W, \ldots$ поверхности односвязными областями, относительно которого предполагается, что существует такое $N > 0$, что ни одна из точек поверхности не принадлежит более чем N элементам покрытия [2].

Для коцепей со значениями в пучке A^1 1-форм класса C^∞ и его подпучках норма коцепи ω_{U_α}, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, $U_\alpha = U_{\alpha_1} \cap \ldots \cap U_{\alpha_n}$ определяется соотношением

$$\|\omega\| = \Big(\sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} |\omega_{U_\alpha}|^2\Big)^{1/2}. \tag{1}$$

Для коцепей со значениями в пучке A^0 функций класса C^∞ и его подпучках (в частности, в Ω-пучке ростков голоморфных функций)

$$\|\omega\| = \Big(\sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} |d\omega_{U_\alpha}|^2\Big)^{1/2}. \tag{1a}$$

Наконец, для пучков ростков функций с операцией умножения (например, Ω^*-пучок ростков голоморфных функций, отличных от нуля)

$$\|\omega\| = \Big(\sum_\alpha \int\limits_{U_\alpha} \Big|\frac{1}{2\pi i}\, d\ln \omega_{U_\alpha}\Big|^2\Big)^{1/2}. \tag{1б}$$

Во всех случаях суммирование распространяется на все возможные пересечения.

$k - D$-коцепью ($k \geqslant 0$) называется k-коцепь с конечной нормой.

$k - D$-коцепь ω называется D-когомологичной нулю, если существует $(k-1) - D$-коцепь η такая, что $\omega = \delta\eta$ (оператор кограницы понимается, как обычно, в когомологиях Чеха). Группы когомологий со значениями в пучке F, построенные таким образом, мы обозначаем $H_D^k(F)$. Ясно, что $H_D^k(C) = H^k(C)$, $H_D^k(R) = H^k(R)$, $H_D^k(J) = H^k(J)$ (C, R, J —

постоянные пучки комплексных, вещественных, целых чисел (соответственно)).

Проверяется, что из точности последовательности

$$0 \to F' \to F \to F'' \to 0, \tag{2}$$

составленной из пучков, для которых определены D-когомологии, вытекает точность последовательности

$$\ldots \to H_D^k(F') \to H_D^k(F) \to H_D^k(F'') \to H_D^{k+1}(F') \to \ldots \tag{3}$$

Лемма 1. *Пусть $M_n \searrow M$ — каноническое исчерпание поверхности M класса O'' и l_n^ν — связные компоненты контуров $l_n = \partial M_n$.*

Тогда для каждых ν и n и любого замкнутого дифференциала ω с конечным интегралом Дирихле

$$\int_{l_n^\nu} \omega = 0. \tag{4}$$

Отсюда вытекает

Теорема 1. *Пусть ω, φ — замкнутые дифференциалы с конечным интегралом Дирихле на поверхности $M \in O''$.*

Тогда для любого канонического исчерпания $M_n \searrow M$ существует подпоследовательность $M_{n_k} \searrow M$, для которой справедливо соотношение

$$\int_M \omega \wedge \varphi = \lim_{n_k \to \infty} \sum_1^{\rho_{n_k}} \left(\int_{k_{2\mu-1}} \omega \int_{k_{2\mu}} \varphi - \int_{k_{2\mu}} \omega \int_{k_{2\mu-1}} \varphi \right), \tag{5}$$

где $k_1, k_2, \ldots$ — канонический гомологический базис M, ρ_n — род M_n.

В частности,

$$\frac{1}{2i} \int_M \omega \wedge \overline{\omega} = \lim_{n_k \to \infty} \sum_1^{\rho_{n_k}} \operatorname{Im} \int_{k_{2\mu-1}} \omega \int_{k_{2\mu}} \overline{\omega}. \tag{6}$$

Рассмотрим последовательность Гротендика — Дольбо

$$0 \to \Omega \xrightarrow{i} A^0 \xrightarrow{\overline{\partial}} A^{0,1} \to 0. \tag{7}$$

Ей соответствует точная последовательность когомологий

$$0 \to H_D^0(\Omega) \xrightarrow{i^*} H_D^0(A^0) \xrightarrow{\overline{\partial}^*} H_D^0(A^{0,1}) \xrightarrow{\delta^*} H_D^1(\Omega) \xrightarrow{\tilde{i}} H_D^1(A^0). \tag{8}$$

Теорема 2. *Группа $\tilde{i}H_D^1(\Omega) \subset H_D^1(A^0)$ отлична от нуля.*

Действительно, пусть φ — замкнутый дифференциал с периодами 1 вдоль циклов $k_{2\mu-1}$ и i — вдоль циклов $k_{2\mu}$, $\mu = 1, 2, \ldots$

Пусть $\{\Phi_U\}$ — 0-коцепь, определяемая соотношениями $d\Phi_U = \varphi$. Тогда

$$\Phi_{UV} = \Phi_U - \Phi_V \tag{9}$$

— 1-коцепь со значениями в пучке C.

Пусть Φ — элемент группы $H_D^1(\Omega)$, определяемый коциклом $\{\Phi_{UV}\}$. Тогда $\tilde{i}\Phi$ отличен от нуля в $H_D^1(A^0)$. В противном случае

$$\Phi_{UV} = f_U - f_V, \quad f_U \in Z_D^0(A^0), \tag{10}$$

Z_D^0 — группа 0-коцепей с конечным интегралом Дирихле. Тогда df_U — 1-форма с конечным интегралом Дирихле, причем из (10) и (9) вытекает, что

$$\Phi_U - f_U = s \tag{11}$$

— функция на M и, следовательно, периоды df_U совпадают с периодами φ.

В силу (6) любой дифференциал, имеющий те же периоды, что и φ, имеет бесконечный интеграл Дирихле, что противоречит (10).

Обозначим

$$S_1 = H_D^0(A^{0,1})/\bar{\partial}^k H_D^0(A^0) \cong \operatorname{Im}\delta^*, \tag{12}$$
$$S_0 = H_D^1(\Omega^1)/\operatorname{Im}\delta^* \cong \operatorname{Im}\tilde{i}.$$

Группа S_0, существование которой только что показано *, называется в дальнейшем сингулярной группой.

D-дивизором γ мы называем 0-коцепь $\{\gamma_U\}$ со значениями в мультипликативном пучке M^* ростков мероморфных функций такую, что 1-коцикл $\{\gamma_{UV}\}$, $\gamma_{UV} = \gamma_U / \gamma_V$, обладает конечной нормой.

Вторая проблема Кузена формулируется следующим образом. Найти D — 0-коцепь $\{f_U\}$ со значениями в мультипликативном пучке ростков отличных от нуля голоморфных функций Ω^* такую, что

$$\gamma_U(p) / \gamma_V(p) = f_U(p) / f_V(p). \tag{13}$$

Из последовательности

$$0 \to J \xrightarrow{i} \Omega \xrightarrow{e} \Omega^* \to 0, \tag{14}$$

$e(f) = \exp 2\pi i f$, вытекает точность последовательности

$$H^1(J) \xrightarrow{i^*} H_D^1(\Omega) \xrightarrow{e^*} H_D^1(\Omega^*) \xrightarrow{\nu} H^2(J). \tag{15}$$

Для того чтобы коцикл $\{\gamma_{UV}\}$ был когомологичен нулю, необходимо, чтобы $\nu(\gamma) = 0$.

Достаточное условие состоит, как обычно, в том, что прообраз γ $e^{*-1}(\gamma) \in i^*H^1(J)$.

Со второй проблемой Кузена тесно связаны $\tilde{\partial}$-проблема и проблема классификации D-расслоений (т. е. расслоений, функции перехода которых образуют 1-коцикл, принадлежащий $H_D{}^1(\Omega^*)$). Постановка и путь решения обеих проблем очевидны.

В том случае, когда $e^{*-1}(\gamma) \in S_1$, условия разрешимости второй проблемы Кузена можно записать в аналитической форме, известной в теории функций под названием теоремы Абеля ([2], [3]). Элемент $e^{*-1}(\gamma)$ может быть в этом случае представлен в виде

$$\frac{1}{2\pi i} \ln \gamma_{UV} = T_U - T_V, \quad T_U \in Z_D^0(A^0). \tag{16}$$

С этим элементом на гильбертовом пространстве $H_D{}^0(\Omega^1)$ связан линейный функционал

$$T[\omega] = \int_M \omega \wedge \bar{\partial} T_U, \quad \omega \in H_D^0(\Omega^1). \tag{17}$$

Используя теоремы об общем виде функционала, (17) можно записать в виде

$$T[\omega] = \lim_{n_k \to \infty} \frac{1}{i} \sum_1^{\rho_{n_k}} \left(c_{2\mu} \int_{k_{2\mu-1}} \omega - c_{2\mu-1} \int_{k_{2\mu}} \omega \right), \tag{18}$$

где c_ν — вещественные периоды некоторого гармонического дифференциала.

Теорема 3. *Если* $\nu(\gamma) = 0$ *и* $e^{*-1}(\gamma) \in S_1$, *то, для того чтобы* $e^{*-1}(\gamma) \in i^*H^1(J)$, *необходимо и достаточно, чтобы числа* c_ν *в* (18) *были целыми.*

---

* Точно так же можно показать существование сингулярной группы для последовательности де Рама.

Пусть в предположениях теоремы 3 дивизор γ представим в виде

$$\gamma_U(p) = \exp 2\pi i(\omega_U + h_U), \tag{19}$$

$$h_U(p) = t(p) + m_U(p), \quad m_U \in Z_D^0(A^0), \tag{20}$$

где ω_U — абелевы интегралы III рода, особенности которых расположены в N, h_U — голоморфные функции и $t(p)$ — однозначная на M функция.

Если нули и полюса функций $\{\gamma_U\}$ определяются символом $\sum \alpha_k p_k$, α_k целые, то

$$T[\omega] = \sum_k \alpha_k \int_{p_0}^{p_k} \omega + m[\omega], \tag{21}$$

где p_0 — произвольная точка поверхности и

$$m[\omega] = \int_M \omega \wedge \bar{\partial} m_U. \tag{22}$$

Институт физики твердого тела
Академии наук СССР
Черноголовка Моск. обл.

Поступило
5 VIII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Чжень Шэн-шэнь, Комплексные многообразия, ИЛ, 1961. [2] Р. Неванлинна, Униформизация, ИЛ, 1956. [3] Y. Kusunoki, Mem. of the Coll. of Sci. Univ. of Kyoto, Ser. A, 32, № 2 (1959).