

УДК 517.11:518.5

МАТЕМАТИКА

М. И. КАНОВИЧ

ОБ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ СИЛЬНО НЕРАЗРЕШИМЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Новиковым 2 XII 1971)

1. В статье ⁽¹⁾ рассматривается понятие сильно неразрешимого множества; в работе ⁽²⁾ вводится понятие сильно нерекурсивного множества. Оказывается, что эти понятия совпадают. Получаемая таким образом «сложностная» характеристика сильно неразрешимых множеств позволяет доказать их универсальность относительно П-сводимости, введенной в ⁽¹⁾. (Там же ⁽¹⁾ доказано, что всякое универсальное относительно П-сводимости множество сильно неразрешимо.)

Далее мы используем понятия и терминологию работ ⁽³⁻⁵⁾. Все математические суждения понимаются конструктивно (см. ⁽⁶⁾).

Определения. Перечислимое множество (натуральных чисел) $\mathfrak{M}$ называется сильно неразрешимым, если для любой пары перечислимых множеств $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}_1$ такой, что $\mathfrak{N}_1$ есть дополнение $\mathfrak{N}$, можно указать такое конечное множество $\mathfrak{F}$, что

$$\mathfrak{M} \cap \mathfrak{F} \neq \mathfrak{N} \cap \mathfrak{F}$$

(см. ⁽¹⁾, § 3).

Пусть $\mathfrak{M}$ — перечислимое множество, n — натуральное число, φ — общерекурсивная функция. Φ -алгоритм $\mathfrak{A}$ назовем $(\mathfrak{M}, n, \varphi)$ -разрешающим, если число шагов процесса применения алгоритма $\mathfrak{A}$ к произвольному натуральному числу x , не большему, чем n , не превосходит $\varphi(x)$ и для всякого такого x

$$\mathfrak{A}(x) \equiv \Lambda \equiv x \in \mathfrak{M}$$

(см. ⁽²⁾).

Общерекурсивную функцию g назовем нижней φ -оценкой сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$, если, каково бы ни было n , сложность всякого $(\mathfrak{M}, n, \varphi)$ -разрешающего Φ -алгоритма не меньше чем $g(n)$. (Под сложностью Φ -алгоритма понимается длина его изображения (см. ⁽⁴⁾)).

Назовем перечислимое множество $\mathfrak{M}$ сильно нерекурсивным, если для любой общерекурсивной функции φ можно указать неограниченную общерекурсивную нижнюю φ -оценку сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$ (ср. ⁽²⁾).

Теорема 1. Для любого множества $\mathfrak{M}$ следующие три предложения эквивалентны друг другу:

- 1) множество $\mathfrak{M}$ сильно неразрешимо;
- 2) множество $\mathfrak{M}$ сильно нерекурсивно;
- 3) для всякой частично рекурсивной функции φ можно указать такую неубывающую общерекурсивную функцию g , что если φ общерекурсивна, то g — неограниченная нижняя φ -оценка сложности разрешения множества $\mathfrak{M}$.

2. Мы используем тот же способ записи алгоритмов, что и в ⁽³⁾, с заменой алфавита ab на алфавит $o|$. Запись Φ -алгоритма $\mathfrak{A}$ будем обозначать $\mathfrak{E}\mathfrak{A}$. Пары слов в алфавите $o|$ понимаются, как в ⁽³⁾, II, § 1, с заменой алфавита A на алфавит $o|$ и буквы a на букву a .

П-оператором назовем всякий Φ -алгоритм $\mathfrak{D}$, перерабатывающий

всякую пару слов в алфавите σ , к которой он применим, в слово в алфавите σ , и такой, что

1) каковы бы ни были Φ -алгоритмы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, эквивалентные относительно алфавита σ , алгоритмы $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\sigma}$ и $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{C}\mathfrak{B}\sigma}$ * эквивалентны относительно алфавита σ (условие согласованности);

2) каков бы ни был Φ -алгоритм $\mathfrak{B}$, полный относительно алфавита σ , алгоритм $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}\sigma}$ также полон относительно алфавита σ (условие полноты).

Следуя (¹), § 5, назовем Φ -алгоритм $\mathfrak{B}$ *частичным характеристическим алгоритмом* множества $\mathfrak{M}$, если для любого натурального числа x такого, что $! \mathfrak{B}(x)$,

$$\mathfrak{B}(x) \equiv \Lambda \equiv x \in \mathfrak{M}.$$

Заметим, что Φ -алгоритм, не применимый ни к какому натуральному числу, является *частичным характеристическим алгоритмом* любого множества.

Будем говорить, что *перечислимое* множество $\mathfrak{N}$ Π -сводится к *перечислимому* множеству $\mathfrak{M}$, если существует такой Π -оператор $\mathfrak{D}$, что, каков бы ни был *частичный характеристический алгоритм* $\mathfrak{B}$ множества $\mathfrak{M}$, алгоритм $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}\sigma}$ является *частичным характеристическим алгоритмом* множества $\mathfrak{N}$ **.

Теорема 2. Если множество $\mathfrak{N}$ Π -сводится к множеству $\mathfrak{M}$, то осуществимо число C такое, что для всякой общерекурсивной функции f можно указать такие общерекурсивные функции φ и g , что, каков бы ни был Φ -алгоритм $\mathfrak{B}$, квазиосуществим такой Φ -алгоритм $\mathfrak{C}$, что

1) сложность алгоритма $\mathfrak{C}$ не превосходит $2\mathfrak{B}\} + 2l + C$, где l — сложность Φ -алгоритма, вычисляющего функцию f ,

2) число шагов процесса применения алгоритма $\mathfrak{C}$ к произвольному натуральному числу x не превосходит $\varphi(x)$,

3) каково бы ни было число n , если алгоритм $\mathfrak{B}$ является $(\mathfrak{M}, g(n), f)$ -разрешающим, то алгоритм $\mathfrak{C}$ является $(\mathfrak{N}, n, \varphi)$ -разрешающим алгоритмом.

Следствие 1 ((¹), § 5, теорема 1). Перечислимое множество, к которому Π -сводимо некоторое сильно неразрешимое множество, само сильно неразрешимо.

Теорема 2 совместно с теоремой 10 статьи (²) дает

Следствие 2. Если перечислимое множество $\mathfrak{M}$ Π -сводится к некоторому гиперпростому множеству, то можно указать такую общерекурсивную функцию φ , что для всякой неограниченной общерекурсивной функции h можно указать такое бесконечное перечислимое множество, что для всякого члена n этого множества квазиосуществим $(\mathfrak{M}, n, \varphi)$ -разрешающий Φ -алгоритм сложности не выше чем $h(n)$.

3. Перечислимое множество $\mathfrak{M}$ назовем *универсальным относительно Π -сводимости* (Π -универсальным), если любое перечислимое множество Π -сводится к множеству $\mathfrak{M}$.

Перечислимое множество $\mathfrak{M}$ назовем *тривиально Π -универсальным*, если осуществим Π -оператор $\mathfrak{D}$ такой, что, каков бы ни был *частичный характеристический алгоритм* $\mathfrak{B}$ множества $\mathfrak{M}$, алгоритм $\widetilde{\mathfrak{D}}_{\mathfrak{B}\sigma}$ не применим ни к какому натуральному числу.

Очевидно, что всякое тривиально Π -универсальное множество Π -универсально.

«Сложностная» характеристика сильно неразрешимых множеств теоремы 1 позволяет доказать следующее утверждение.

* Обозначение $\mathfrak{B}_P$ понимается, как в (⁷).

** Наше определение Π -оператора отличается от определения полного функционального оператора статьи (¹). Поэтому наше определение Π -сводимости иное, чем в (¹). Однако можно показать, что оба определения эквивалентны.

Теорема 3. *Всякое сильно неразрешимое множество тривиально П-универсально.*

В статье ⁽²⁾ приводятся примеры сильно неразрешимых множеств, являющихся, по нашей терминологии, тривиально П-универсальными. Теорема 3 показывает, что подобная ситуация не случайна.

Объединяя следствие 1 и теорему 3, получаем следующее

Следствие 3. *Для всякого множества $\mathfrak{M}$ следующие три предложения попарно эквивалентны:*

- 1) множество $\mathfrak{M}$ сильно неразрешимо,
- 2) множество $\mathfrak{M}$ П-универсально,
- 3) множество $\mathfrak{M}$ тривиально П-универсально.

4. Рассмотрим соотношение П-сводимости и некоторых других видов сводимости, введенных в ^(8, 9).

Нетрудно видеть, что если множество $\mathfrak{N}$ таблично сводится к множеству $\mathfrak{M}$, то множество $\mathfrak{N}$ П-сводится к множеству $\mathfrak{M}$.

Теорема 4. *Осуществима такая пара перечислимых множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что*

- 1) множество $\mathfrak{N}$ не сводится по Тьюрингу к множеству $\mathfrak{M}$,
- 2) множество $\mathfrak{M}$ П-универсально (и, следовательно, множество $\mathfrak{N}$ П-сводится к множеству $\mathfrak{M}$).

Будем говорить, что множество $\mathfrak{N}$ слабо t -сводится к множеству $\mathfrak{M}$, если осуществимы общерекурсивная функция f и Ф-алгоритм $\mathfrak{A}$ такие, что для любого x

- 1) если $f(x) \in \mathfrak{M}$, то $\mathfrak{A}(x) \neq \Lambda \equiv x \in \mathfrak{N}$,

- 2) если $f(x) \notin \mathfrak{M}$, то $x \notin \mathfrak{N}$ (ср. ⁽²⁾, пункт 6).

Теорема 5. *Для всякого перечислимого множества $\mathfrak{M}$ можно указать такое перечислимое множество $\mathfrak{N}$, что*

- 1) множество $\mathfrak{N}$ слабо t -сводится к множеству $\mathfrak{M}$,
- 2) множество $\mathfrak{M}$ 1-сводится к множеству $\mathfrak{N}$,
- 3) если множество $\mathfrak{M}$ не рекурсивно, то множество $\mathfrak{N}$ сильно не рекурсивно (см. ⁽²⁾, теорема 8).

Теорема 5 и следствие 2 дают

Следствие 4. *Осуществима такая пара перечислимых множеств $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$, что*

- 1) множество $\mathfrak{N}$ слабо t -сводится к множеству $\mathfrak{M}$,
- 2) множество $\mathfrak{M}$ 1-сводится к множеству $\mathfrak{N}$,
- 3) неверно, что множество $\mathfrak{N}$ П-сводится к множеству $\mathfrak{M}$.

Таким образом, П-сводимость и слабые сводимости (слабая t -сводимость, слабая табличная сводимость, сводимость по Тьюрингу) не «сравнимы». Однако на уровне «универсальности» несравнимость исчезает, так как из теоремы 3 и теоремы 1 статьи ⁽²⁾ получается следующее

Следствие 5. *Всякое перечислимое множество, универсальное относительно слабой табличной сводимости, является П-универсальным.*

Автор выражает глубокую благодарность А. А. Маркову за внимание и советы при написании данной статьи.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. С. Цейтин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **93**, 102 (1970).
² М. И. Канович, ДАН, **194**, № 3, 500 (1970). ³ А. А. Марков, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **42** (1954). ⁴ А. А. Марков, Изв. АН СССР, сер. матем., **31**, 161 (1967). ⁵ С. К. Клини, Введение в метаматематику, М., 1957.
⁶ Н. А. Шанин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **52**, 226 (1958).
⁷ Б. А. Кушнер, Г. С. Цейтин, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **8**, 107 (1968). ⁸ E. L. Post, Bull. Am. Math. Soc., **50**, 284 (1944). ⁹ R. M. Friedberg, H. Rogers jr., Zs. Math. Logik u. Grundlagen d. Math., **5**, 117 (1959).