Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 513.88 МАТЕМАТИКА

В. Э. ЛЯНЦЕ

О НЕКОТОРЫХ ОТНОШЕНИЯХ МЕЖДУ ЗАМКНУТЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 XI 1971)

Пусть H — комплексное гильбертово пространство. Через $\mathscr{C}^{\cdot}(H)$ мы обозначаем множество всех линейных замкнутых операторов $T: H \to H$, для которых $\dim [D(T)^{\perp}] < \infty$ ($D(T)$ — область определения оператора T) и полагаем $\mathscr{C}(H) = \{T \in \mathscr{C}^{\cdot}(H): \dim [D(T)^{\perp}] = 0$ (так что операторы из $\mathscr{C}(H)$ плотно заданы). Если T_1 и T_2 — линейные операторы, а m — натуральное число, то запись $T_1 \subset {}^m T_2$ (или $T_2 \supset {}^m T_1$) означает, что $T_1 \subset T_2$ и $\dim [D(T_2) / D(T_1)] = m$. В этом случае T_2 (T_1) называется конечнократным (точнее, m-кратным) расширением оператора T_1 (сужением оператора T_2). Ниже рассматриваются некоторые свойства элементов множеств $\mathscr{C}^{\cdot}(H)$ и $\mathscr{C}(H)$, связанные с бинарным отношением $\subset^m$.

1. Если $T \in \mathscr{C}(H)$ и T неограничен, то при любом натуральном m существуют m-кратные сужения и m-кратные расширения оператора T, принадлежащие $\mathscr{C}(H)$.

Это предложение следует из того, что область определения замкнутого оператора $H \to H$ имеет бесконечную коразмерность в H, что, в свою очередь, вытекает из теоремы о замкнутом графике.

2. Конечнократное расширение замкнутого оператора является замкнутым оператором. Условие замкнутости конечнократного сужения удобно формулировать в следующих терминах (ср. с ([1])). Пусть $L \in \mathscr{C}(H)$ и оператор L неограничен. L-краевой формой называется линейный функционал u', заданный на $D(L)$, непрерывный по норме $\|\cdot\|_L = \sqrt{(\cdot,\cdot)_L}$ графика оператора L ($(f,g)_L \overset{\mathrm{df}}{=} (f,g) + (Lf, Lg)$, $f, g \in D(L)$) и неограниченный относительно нормы $\|\cdot\|$ пространства H. Линейное пространство, образованное L-краевыми формами и нулевым функционалом, мы обозначим через $\Gamma(L)$.

Пусть теперь $L \in \mathscr{C}(H)$, и пусть U' — подпространство в $\Gamma(L)$ конечной размерности m. Если $L_0 \subset L$ и $D(L_0) = \{g \in D(L): u'(g) = 0\ \forall u' \in U'\}$, то $L_0 \in \mathscr{C}(H)$ и $L_0 \subset^m L$. Обратно, если $L_0, L \in \mathscr{C}(H)$ и $L_0 \subset^m L$, то множество $U' = \{u' \in \Gamma(L): u'(g) = 0\ \forall g \in D(L_0)\}$ является линейным пространством размерности m и имеет место предыдущая формула для $D(L_0)$.

3. Если $T_1, T_2 \in \mathscr{C}^{\cdot}(H)$, то запись $T_1 \vee T_2$ означает, что у операторов T_1 и T_2 имеется общее конечнократное сужение $A \in \mathscr{C}^{\cdot}(H)$. В этом случае пара $\langle T_1, T_2 \rangle$ называется ограниченной снизу, а число $\varkappa(T_1, T_2) \overset{\mathrm{df}}{=} \dim D(T_2) / D(A) - \dim D(T_1) / D(A)$, называемое относительным индексом этой (упорядоченной) пары, не зависит от A.

Отношение $\vee$ ограниченности снизу является отношением эквивалентности на $\mathscr{C}^{\cdot}(H)$, а относительный индекс обладает следующим циклическим свойством: если $T_1, T_2, T_3 \in \mathscr{C}^{\cdot}(H)$ и $T_1 \vee T_2$, $T_2 \vee T_3$, то $\varkappa(T_1, T_2) + \varkappa(T_2, T_3) + \varkappa(T_3, T_1) = 0$.

4. Если $T_1, T_2 \in \mathscr{C}(H)$, то запись $T_1 \bigvee T_2$ ($T_1 \bigwedge T_2$) означает, что операторы T_1 и T_2 обладают общим конечнократным сужением (расшире-

нием), принадлежащим $\mathscr{C}(H)$. Отношения $\bigvee$ и $\bigwedge$ не являются транзитивными на $\mathscr{C}(H)$ (хотя они рефлексивны и симметричны). Справедливо следующее

Утверждение. *Транзитивное замыкание $\hat{\bigvee}$ отношения $\bigvee$ совпадает с транзитивным замыканием $\hat{\bigwedge}$ отношения $\bigwedge$ и совпадает с сужением отношения $\bigvee$ из $\mathscr{C}^{\bullet}(H)$ на $\mathscr{C}(H)$.*

(По поводу применяемой здесь терминологии см. ([2]).) Другими словами, если T, $S \in \mathscr{C}(H)$, то существование таких операторов $T_1, \ldots, T_p \in \in \mathscr{C}(H)$, что $T \bigvee T_1$, $T_1 \bigvee T_2, \ldots, T_p \bigvee S$ эквивалентно существованию таких операторов $S_1, \ldots, S_q \in \mathscr{C}(H)$, что $T \bigwedge S_1$, $S_1 \bigwedge S_2, \ldots, S_q \bigwedge S$ и эквивалентно существованию общего конечнократного сужения $A \in \mathscr{C}^{\bullet}(H)$ операторов S и T. В этом случае операторы S и T называются родственными, а само отношение родственности обозначается символом $\sim$. Будучи отношением эквивалентности, родственность $\sim$ разбивает $\mathscr{C}(H)$ на попарно непересекающиеся классы, состоящие из родственных друг другу операторов.

5. Для операторов S, $T \in \mathscr{C}(H)$, резольвентные множества которых $\rho(S)$ и $\rho(T)$ соответственно имеют непустое пересечение, справедлив следующий признак родственности: если $\zeta \in \rho(S) \cap \rho(T)$, то $S \sim T$, тогда и только тогда, когда оператор $(S-\zeta)^{-1} - (T-\zeta)^{-1}$ является конечномерным *. Опишем формулу, связывающую резольвенты родственных операторов.

Пусть S, $T \in \mathscr{C}(H)$, $S \sim T$, $\varkappa(S, T) = 0$ и пусть $\rho(S) \neq \phi$. Существует оператор $A \in \mathscr{C}^{\bullet}(H)$, являющийся максимальным общим сужением операторов S и T. Обозначим через $(p_1, \ldots, p_m)$ какой-либо базис пространства $\Gamma(S, A)$, состоящего, по определению, из тех линейных заданных на $D(S)$ и $\|\cdot\|_S$-непрерывных функционалов, которые равны нулю на $D(A)$, и пусть $s_1, \ldots, s_m$ — такие элементы из $D(S)$, что $p_i(s_j) = \delta_{ij} =$ дельта Кронекера. Пусть функционалы $q_i \in \Gamma(T, A)$, $i = 1, \ldots, m$, и элементы $t_j \in D(T)$, $j = 1, \ldots, m$, аналогично связаны с парой операторов T, A (подчеркнем, что $m = \varkappa(T, A) = \varkappa(S, A)$, ибо по предположению $\varkappa(S, T) = 0$).

Далее мы используем следующие обозначения: через G обозначаем m-мерное комплексное арифметическое пространство $\mathbf{C}^m$ и, если E — произвольное пространство, а $r_1, \ldots, r_m$ — линейные функционалы, заданные на E, то через r мы обозначаем оператор $E \to G$, заданный формулой $rf = (r_1 f, \ldots, r_m f)$, $f \in E$. Кроме того, для произвольных $e_1, \ldots, e_m \in E$ через e^* мы обозначаем оператор $G \to E$, заданный формулой $e^* c = c_1 e_1 + \ldots + c_m e_m$, $c = (c_1, \ldots, c_m) \in G$. Используя эти обозначения, положим

$$\Omega(\zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} p(S-\zeta)^{-1}(T-\zeta)t^*, \quad \zeta \in \rho(S), \tag{1}$$

где p отвечает ранее введенным функционалам $p_1, \ldots, p_m$, а t^* — элементам $t_1, \ldots, t_m$. Для каждого $\zeta \in \rho(S)$, $\Omega(\zeta)$ является линейным оператором, действующим в $G = \mathbf{C}^m$. Функцию Ω: $\zeta \to \Omega(\zeta)$ мы называем характеристической оператор-функцией ** оператора T относительно оператора S. Ее роль поясняет следующая

Теорема. *Пусть $\zeta \in \rho(S)$, $f \in D(T)$ и $(T-\zeta)f = g$. Положим $c = qf$, где q — оператор $D(T) \to G$, построенный по введенным ранее функционалам $q_1, \ldots, q_m$.*

---

* В этом случае $\varkappa(S, T) = 0$.

** Этот термин принадлежит М. С. Лившицу, который развил теорию характеристических оператор-функций в связи с задачей приведения оператора к треугольному виду. Характеристические оператор-функции — фундаментальное понятие теории возмущений. Заметим, что если $T \sim S$, то оператор T можно рассматривать как своеобразное возмущение оператора S (ср. ([4])).

Тогда справедливы соотношения

$$\Omega(\zeta)c = p(S-\zeta)^{-1}g, \quad f = t^*(\zeta)c + (S-\zeta)^{-1}g,$$

где

$$t^*(\zeta) \overset{\text{df}}{=} [1-(S-\zeta)^{-1}(T-\zeta)]\,t^*. \tag{2}$$

Обратно, *если* $\zeta \in \rho(S)$, $g \in H$, $c \in G$ *и выполняются соотношения*

$$\Omega(\zeta)c = p(S-\zeta)^{-1}g, \quad f \overset{\text{df}}{=} t^*(\zeta)c + (S-\zeta)^{-1}g,$$

то $f \in D(T)$, $(T-\zeta)f = g$ *и* $qf = c$.

Отсюда непосредственно следует, что если $\zeta \in \rho(S)$, то $\zeta \in \rho(T)$, тогда и только тогда, когда $\det \Omega(\zeta) \neq 0$. В этом случае

$$(T-\zeta)^{-1} = t^*(\zeta)\Omega(\zeta)^{-1}p(S-\zeta)^{-1} + (S-\zeta)^{-1}. \tag{3}$$

Формула (3) напоминает формулу для резольвенты возмущенного оператора.

6. Пусть $S \in \mathscr{C}^{\cdot}(H)$ и S есть Ф-оператор (см., например, ([3])). Если $T \in \mathscr{C}^{\cdot}(H)$ и $T \vee S$, то T также является Ф-оператором и $\operatorname{ind} T = \operatorname{ind} S + \varkappa(S,T)$ (см. п. 3). В частности, оператор из $\mathscr{C}(H)$, родственный Ф-оператору, сам является Ф-оператором.

7. Пусть L_0, $L \in \mathscr{C}(H)$ и $L_0 \subset L$ (здесь мы не предполагаем, что $\dim D(L)/D(L_0) < \infty$). Положим $M = L_0^*$, $M_0 = L^*$ и рассмотрим ортогональные разложения

$$D(L) = D(L_0) \oplus^L U, \quad D(M) = D(M_0) \oplus^M V;$$

при этом для произвольного оператора $S \in \mathscr{C}(H)$ символ $\oplus^S$ обозначает прямую $(\cdot,\ \cdot)_S$-ортогональную сумму (напомним, что $(f,g)_S \overset{\text{df}}{=} (f,g) + (Sf,Sg)$, f, $g \in D(S)$) подпространств пространства $D(S)$. Тогда *сужение оператора* L *на* U *является унитарным отображением пространства* $\{U;\ (\cdot,\ \cdot)_L\}$ *на пространство* $\{V;\ (\cdot,\ \cdot)_M\}$; *обратным к нему является сужение оператора* $-M$ *на* V.

Это утверждение используется при доказательстве ранее сформулированных результатов. Из него легко вытекает следующее

Обобщение формулы Грина. *Пусть в дополнение к предыдущим предположениям* $\dim D(L)/D(L_0) < \infty$. *Для произвольного базиса* $(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$ *пространства* $\Gamma(L, L_0)$ (*см. п.* 5) *и произвольного базиса* $(\delta_1, \dots, \delta_m)$ *пространства* $\Gamma(M, M_0)$ *существует такой единственный линейный оператор* B: $\mathbf{C}^m \to \mathbf{C}^m$, *что для любых* $f \in D(L)$, $g \in D(M)$

$$(Lf, g) - (f, Mg) = (B\gamma f, \delta g)_{\mathbf{C}^m}; \tag{4}$$

при этом $\det B \neq 0$ *и* $(x,y)_{\mathbf{C}^m} \overset{\text{df}}{=} x_1\bar{y}_1 + \dots + x_m\bar{y}_m$.

8. Укажем «общий вид» оператора, родственного данному.

Пусть $L \in \mathscr{C}(H)$ и пусть T — такой оператор из $\mathscr{C}(H)$, что $T \sim L$ и $D(T) \subset D(L)$. (В силу сказанного в начале п. 2, условие $D(T) \subset D(L)$ не ограничивает общность.) Тогда существуют такие $x_1, \dots, x_k \in H$, такие заданные на $D(L)$ и $(\cdot,\ \cdot)_L$-непрерывные функционалы $t_1', \dots, t_k'$ и такие L-краевые формы $\tau_1', \dots, \tau_\varkappa'$, где $\varkappa = \varkappa(L,T)$, что $D(T) = \{f \in D(L)\colon \tau_j'(f) = 0,\ j = 1, \dots, \varkappa\}$ и $Tf = Lf + \sum_{i=1}^{k} t_i'(f)x_i$ при $f \in D(T)$. Верно также соответствующее обратное утверждение.

Оператор T^*, сопряженный описанному выше оператору T, не допускает столь простого описания. В связи с этим мы введем сейчас некоторые дополнительные ограничения.

9. Пусть L_0, $L \in \mathscr{C}(H)$ и $L_0 \subset^m L$ для некоторого натурального m. Мы скажем, что оператор T из $\mathscr{C}(H)$ является родственным паре $\langle L, L_0\rangle$ и бу-

дем писать $T \sim \langle L, L_0 \rangle$, если $T \sim L$, $D(T) \subset D(L)$, $D(T^*) \subset D(L_0^*)$ и $D([L|D(T)]^*) \subset D(L_0^*)$. (Через $S|E$ мы обозначаем сужение оператора S на подпространство $E \subset D(S)$.) В этом случае автоматически выполняется условие $D([L_0^*|D(T^*)]^*) \subset D(L)$. (Отметим, что из $T \sim \langle L, L_0 \rangle$ не следует, что $D(L_0) \subset D(T)$.) Кроме того, если $T \sim \langle L, L_0 \rangle$, то функционалы t_i' и τ_j', участвовавшие в формулах п. 8, отличаются от некоторых функционалов из $\Gamma(L, L_0)$ на слагаемые, непрерывные по норме пространства H. Это условие $t_i', \tau_j' \in \Gamma(L, L_0) \pmod H$ не только необходимо, но и достаточно для того, чтобы $T \sim \langle L, L_0 \rangle$. Отсюда вытекает следующее

Утверждение. *Пусть $T \sim \langle L, L_0 \rangle$; тогда существует такой базис $(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ пространства $\Gamma(L, L_0)$ и такие $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$, $\psi_1, \ldots, \psi_n$, $\chi_1, \ldots, \chi_n \in H$, что*

$$D(T) = \{f \in D(L) : \gamma_j(f) = (f, \varphi_j), \quad j = 1, \ldots, \varkappa\},$$

где

$$\varkappa = \varkappa(L, T) \text{ и } Tf = Lf + \sum_{j=\varkappa+1}^{m} \gamma_j(f)\varphi_j + \sum_{i=1}^{n} (f, \chi_i)\psi_i \text{ при } f \in D(T).$$

Справедливо также соответствующее обратное

Утверждение. *Пусть $(\delta_1, \ldots, \delta_m)$ — такой базис пространства $\Gamma(L_0^*, L^*)$, что в формуле (4) $B = 1$. Тогда*

$$D(T^*) = \{g \in D(L_0^*) : \delta_j(g) = -(g, \varphi_j), \quad j = \varkappa + 1, \ldots, m\},$$

$$T^*g = \overset{*}{L_0} g + \sum_{j=1}^{\varkappa} \delta_j(g)\varphi_j + \sum_{j=1}^{n} (g, \psi_i)\chi_i$$

при $g \in D(T^*)$.

Львовский государственный университет
им. И. Франко

Поступило
19 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Э. Лянце, ДАН, 132, № 5, 1023 (1960). [2] Ю. А. Шрейдер, Равенство, сходство, порядок, «Наука», 1971. [3] И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, УМН, 12, 2 (74), 43 (1957). [4] N. Aronszaja, R. D. Brown, Studia Math., 36, № 1, 1 (1970).