Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 517.948.32

МАТЕМАТИКА

О. И. МАРИЧЕВ

ДВА УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА С ФУНКЦИЯМИ ГОРНА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 9 XI 1971)

С 1960 г. опубликованы работы ([2-11]) и другие, посвященные решению интегральных уравнений Вольтерра типа свертки, содержащих в ядре специальную функцию. Подобные уравнения имеют самостоятельное значение, а также важны при исследовании краевых задач для уравнений в частных производных. Они решаются различными методами, главным образом, с помощью интегральных преобразований и комплексного интегродифференцирования. Выяснилось, что изученные операторы являются суперпозицией двух операторов: в случае свертки Меллина вида $x^\sigma I^\mu$, где I^μ — производная или интеграл комплексного порядка μ, а в случае свертки Лапласа вида $e^{\sigma x} I^\mu$.

В настоящей работе решены два уравнения с функциями Горна ([1]) в ядре, обобщающие рассмотренные ранее. Второе из них содержит изученные в ([7-9]) уравнения с функцией Гаусса в ядре. Его решение получено двумя методами в нескольких видах. Указаны условия применимости этих методов. При использовании аппарата комплексного интегродифференцирования (один из методов) основная трудность заключается в сложении особенностей функции и ядра в точке нуль. При использовании же преобразования Меллина наряду с поведением функций в нуле необходимо учитывать их поведение и на бесконечности. Первое уравнение, в отличие от второго, не является уравнением типа свертки; оно возникает при решении одной краевой задачи.

1°. Изучая задачу Коши для гиперболического уравнения

$$z_{xx} - z_{ss} + \frac{2\mu}{x} z_x - \frac{2\beta}{s} z_s - b^2 z = 0, \tag{1}$$

μ, β, $b = \text{const}$, $b > 0$; $z(x, 0) = \tau(x)$, $z_s(x, 0) = 0$. М. Б. Капилевич нашел ее решение в виде* (([13]), (5.25)) $z(x, s) = z[\tau]$, содержащем под интегралом функцию Горна Ξ_2 (([1]), гл. 5.7(26))*. Воспользовавшись указанными в ([13]) функциями Грина — Адамара и Римана, аналогично ([12], [14]), для уравнения (1) получим решение второй задачи Коши — Гурса: $z(x, x) = \varphi(2x)$, $z_s(x, 0) = 0$. Если в этом решении положить $s = 0$, то найденная формула $z(x, 0) = \tau(x) = z[\varphi]$ станет обращением выражения $z(x, s)\,|_{s=x} = \varphi(2x) = z[\tau]$, откуда после замены функций τ на f и φ на g для уравнения

$$\Xi[f](x) \equiv \int_0^x f(t) \frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} \Xi_2\left[\mu, 1-\mu, \beta, \frac{x-t}{2x}, \frac{b^2}{4} t(t-x)\right] dt = g(x) \tag{2}$$

---

* В (([13]), (5,25)) и ([1]) имеются опечатки. В формуле (5.25) из ([13]) пропущен минус в выражении, содержащем ω, правильно будет $4(1+\xi t)\omega = -t^2(\xi^2 - 1)$. В ([1]) в формуле 5.7 (20) вместо $(\beta)_n$ нужно $(\beta)_m$; в 5.7 (21) вместо $(\beta')_m$ нужно $(\beta')_n$; в 5.7 (26) вместо $(\beta)_n$ нужно $(\beta)_m$; в 5.8 (6) вместо $(-t)^\rho$ нужно $(-t)^{-\rho}$; в 5.11 (9) вместо $(-y)^\beta$ нужно $(-y)^{-\beta}$; в 5.11 (10) вместо $(1-y)^{-\mu}$ нужно $(-y)^{-\mu}$.

получим формулу решения

$$f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x t^{\beta}\,\frac{(x-t)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\,\Xi_2\left[\mu,\,1-\mu,\,1-\beta,\frac{t-x}{2t},\,\frac{b^2}{4}\,x(x-t)\right]d\,[t^{1-\beta}g(t)]. \tag{3}$$

Результат верен также и для комплекснозначных функций f и g при абсолютно непрерывной $g(x)$, если выполнены условия сходимости интегралов: $0<\operatorname{Re}\beta<1$ и $tf(t),\ t^{1+\mu}g(t),\ t^{2-\mu}g(t)\to 0$ при $t\to 0$.

Уравнение (2) при $\mu=0$ примет вид

$$\bar J_{\beta-1}[f](x)\equiv\int_0^x f(t)\frac{(x-t)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,\bar J_{\beta-1}[b\sqrt{t(x-t)}]\,dt=g(x), \tag{4}$$

где $\bar J_\nu(z)=\Gamma(\nu+1)\left(\frac{2}{z}\right)^\nu J_\nu(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда.

Решение уравнения (4) найдено в ([15]) в форме, преобразуемой к решению (3) при $\mu=0$. Если $b=0$, то формулы (2), (3) приводятся к виду, содержащему функцию Лежандра ([1]). Подобные уравнения изучались в ([4], [6]). Вычислением устанавливаем свойство

$$\Xi\,[f](x)=(2x)^{1-\mu}I^{\mu}_{x^2}\frac{1}{2x}\,\bar J_{\beta-\mu-1}[f](x),\ \operatorname{Re}\beta>\operatorname{Re}\mu>0, \tag{5}$$

где $I^{\mu}_{x^k}\ \psi(x)$, $k=2$,— интеграл порядка μ от функции $\psi(x)=\frac{1}{2x}\times$ $\times\,\bar J_{\beta-\mu-1}\,[f](x)$, определяемый формулой

$$\tilde\psi(x)=I^{\mu}_{x^k}\psi(x)=\int_0^x\psi(t)\,\frac{(x^k-t^k)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu)}\,kt^{k-1}dt,\qquad k=1,2,\ldots \tag{6}$$

Соотношение (5) показывает, что оператор Ξ является суперпозицией двух более простых обращаемых операторов. Формулы (2)—(6) сохраняются и на промежутке интегрирования от a, $a>0$, до x. Тогда для существования интеграла (3) достаточно абсолютной непрерывности $g(t)$ на $[a,x]$, $x<\infty$, и $g(a)=0$.

2°. В ходе решения задачи Трикоми для уравнения, имеющего в гиперболической части вид (1) при $b=0$, автору пришлось решить уравнение с функцией F_3 ([1]) в ядре

$$\int_0^x f(t)\,\frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)}\,\Gamma_3\left(\alpha,\,\alpha',\,1-\alpha,\,1-\alpha',\,c,\,\frac{t-x}{2t},\,\frac{x-t}{2x}\right)dt=g(t),\ \operatorname{Re}c>0. \tag{7}$$

Позже выяснилось, что найденные при этом формулы с помощью установленного автором квадратичного преобразования

$$F_3\left(\alpha,\,\alpha',\,1-\alpha,\,1-\alpha',\,c,\,z\,\frac{z}{2z-1}\right)=$$
$$=(1-z)^{c-1}(1-2z)^{\alpha'}F\left[\frac{c+\alpha'-\alpha}{2},\,\frac{c+\alpha'+\alpha-1}{2};\ c;\ 4z(1-z)\right] \tag{8}$$

сводятся к частному случаю указанного ниже результата.

3°. Обозначим через $Q_\varkappa^\mu$, $\operatorname{Im}\varkappa=\operatorname{Im}\mu=0$, класс комплекснозначных функций $f(x)$ на $(0,\infty)$, для которых при любых $0<\varepsilon<E<\infty$ существуют интегралы Лебега $\int_0^E|f(x)|\,x^\varkappa dx$, $\int_\varepsilon^\infty|f(x)|\,x^\mu dx<\infty$. Если существует $\int\limits_0^E |f(x)|x^\varkappa dx < \infty$, то $f(x) \in Q_\varkappa$. В этом классе рассмотрим уравнение

$$F[f](x) \equiv \int\limits_0^x f(t)\frac{(x-t)^{c-1}}{\Gamma(c)} F_3\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta', c, 1-\frac{x}{t}, 1-\frac{t}{x}\right)dt = g(x),$$
$$0 < x < \infty. \tag{9}$$

Аналогично теоремам 1, 4 из ([9]) установим, что справедливы

Теорема 1. *Если* $\operatorname{Re} c > 0$, $f(x) \ni Q_\varkappa^\mu$, где $\varkappa < \varkappa_1 = \min[\operatorname{Re}\alpha, \operatorname{Re}\beta, \operatorname{Re}(c-\alpha'-\beta')]$, *и* $h < \varkappa_1 - \operatorname{Re} c$, $h \leqslant \mu - \operatorname{Re} c$, *то* $F[f](x)$ *существует почти всюду в* $(0, \infty)$, *и* $F[f](x) \in Q^n_{\varkappa-\operatorname{Re} c}$.

Символически обозначим это через $F[f](x) \in Q^n_{\varkappa-\operatorname{Re} c}$.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{Re} c > 0$, $f(x) \underset{c}{\in} Q_\varkappa$, $\varkappa < \varkappa_1$, $\varkappa \leqslant \varkappa_2 = \min[\operatorname{Re}(c-\alpha'), \operatorname{Re}(c-\beta'), \operatorname{Re}(\alpha+\beta)]$ *и почти всюду* $F[f](x) = 0$, *то* $f(x) = 0$ *для почти всех* x *из* $(0, \infty)$.

Вычислением интеграла приходим к формуле

$$\int\limits_1^\infty \frac{x^{s-c-1}}{\Gamma(c)}(x-1)^{c-1} F_3\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta', c, 1-x, 1-\frac{1}{x}\right)dx =$$
$$= \frac{\Gamma(1+\alpha-s)\Gamma(1+\beta-s)\Gamma(1+c-\alpha'-\beta'-s)}{\Gamma(1+\alpha+\beta-s)\Gamma(1+c-\alpha'-s)\Gamma(1+c-\beta'-s)}, \tag{10}$$
$$s - c \neq 1, 2, \ldots, \quad \operatorname{Re} c > 0, \quad \varkappa_1 + 1 > \operatorname{Re} s.$$

Из (10) следует соотношение

$$F_3\left(\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, 1-x, 1-\frac{1}{x}\right) = x^{\alpha'-\alpha} F_3\left(\alpha, \alpha', b, b', \gamma, 1-\frac{1}{x}, 1-x\right), \tag{11}$$

где $b = \gamma - \alpha' - \beta$, $b' = \gamma - \alpha - \beta'$, обобщающее свойство 2.1(22) из ([1]).

Решение уравнения (9) ищем в виде

$$f(x) = x^p R^{(l)}(x), \tag{12}$$
$$R(x) =$$
$$= x^\nu \int\limits_0^x \tau^\theta \frac{(x-\tau)^{\tilde c-1}}{\Gamma(\tilde c)} F_3\left(\tilde\alpha, \tilde\alpha', \tilde\beta, \tilde\beta', \tilde c, 1-\frac{x}{\tau}, 1-\frac{\tau}{x}\right)\frac{p^m}{d\tau^m}[\tau^\gamma g(\tau)]\,d\tau.$$

С помощью преобразования Меллина над (9), (12) и (10) определяем 8 наборов параметров $\tilde\alpha$, $\tilde\alpha'$, $\tilde\beta$, $\tilde\beta'$, p, ν, θ, γ, $\tilde c = l + m - c$ (табл. 1), которые по формуле (12) дают 8 представлений решения уравнения (9), не

Таблица 1

1) $\tilde\alpha = \gamma = -\theta = -\alpha'$, $\tilde\alpha' = p = -\nu = -\alpha$, $\tilde\beta = m - \beta'$, $\tilde\beta' = l - \beta$;

2) $\tilde\alpha = -\alpha'$, $\tilde\alpha' = -\alpha$, $\tilde\beta = l - \beta'$, $\tilde\beta' = m - \beta$, $\nu = -p + l - m = c - m - \alpha'$; $\theta = -\gamma + m - l = c - l - \alpha$.

В случаях 3) — 5): $\tilde\alpha' = -\alpha$, $\tilde\beta' = -\beta$, $p = -\nu + l$, $\theta = -\gamma - l$ и

3) $\tilde\alpha = \gamma = -\alpha'$, $\tilde\beta = l + m - \beta'$, $\nu = c - \alpha' - m$;

4) $\tilde\alpha = \gamma + l = -\alpha'$, $\tilde\beta = l + m - \beta'$, $\nu = c - \alpha'$;

5) $\tilde\alpha = m - \alpha'$, $\tilde\beta = l - \beta'$, $\nu = c - \alpha'$, $\gamma = -\beta'$.

В случаях 6) — 8): $\tilde\alpha = -\alpha'$, $\tilde\beta = -\beta'$, $\nu = -p - m$, $\gamma = -\theta + m$ и

6) $\tilde\alpha' = p = -\alpha$, $\tilde\beta' = l + m - \beta$, $\theta = c - \alpha - l$;

7) $\tilde\alpha' = p + m = -\alpha$, $\tilde\beta' = l + m - \beta$, $\theta = c - \alpha$;

8) $\tilde\alpha' = l - \alpha$, $\tilde\beta' = m - \beta$, $\theta = c - \alpha$, $p = -\beta$.

Таблица 2

	1	2	3	4	5	6
k	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha'$	$-\alpha'$	$\alpha+\alpha'-c$	$\alpha+\alpha'-c$
n	$-\alpha'$	$\alpha+\alpha'-c$	$\alpha+\alpha'-c$	$-\alpha$	$-\alpha$	$-\alpha'$
r	$-\beta$	$-\beta$	$\alpha'+\beta'-c$	$\alpha'+\beta'-c$	$-\alpha$	$-\alpha$
u	$-\beta'$	$-\alpha'$	$-\alpha'$	$\alpha+\beta-c$	$\alpha+\beta-c$	$-\beta'$
s	β	$\alpha+\alpha'+\beta+\beta'-c$	$c-\beta-\beta'$	$c-\alpha-\beta'$	β'	$c-\alpha'-\beta$

сводимых одно в другое преобразованиями типа (11) над ядрами (9) и (12).

Условия применимости преобразования Меллина определяет

Теорема 3. *Решение уравнения* (9), *где* $g(x) \in Q_{\varkappa-\operatorname{Re} c}^{\mu-\operatorname{Re} c}$ *в классе* $f(x) \in Q_\varkappa^\mu$ *существует, единственно и выражается формулой* (12), $l^2+m^2>0$, *с параметрами из табл.* 1 *при условиях:* а) $\varkappa<\mu<\varkappa_1$, $\mu<\varkappa_2$ *и некоторых дополнительных ограничениях на* μ *в случаях* 1)—5); б) *по крайней мере, одна из функций* $g^{(m-1)}(x)$, $R^{(l-1)}(x)$, $m, l = 1, 2, \ldots, m+l > \operatorname{Re} c > 0$, *абсолютно непрерывна на* (ε, E) *при любых* $\varepsilon>0$, $E<\infty$. *Если лишь* $g^{(m-1)}(x)$, $(R^{(l-1)}(x))$ *абсолютно непрерывна, то* $l=0$ $(m=0)$.

Определим дробную производную $I^{-\mu}\psi(x)$, $\operatorname{Re}\mu>0$, как решение уравнения (6), $k=1$, при условии существования интеграла $\psi(x) \in Q_\varkappa$, $\varkappa<0$. Тогда $I^{-\mu}\psi(x) \in Q_{\varkappa-\operatorname{Re}\mu}$. С помощью теорем 7—9 из ([9]) устанавливается

Теорема 4. *Если* $\operatorname{Re} c>0$, $\varkappa \leqslant \varkappa_2-\operatorname{Re} c$, $\varkappa<\min[-\operatorname{Re} r, \operatorname{Re}(t+u)]$, *то, чтобы уравнение* (9) *имело решение* $f(x) \in Q_\varkappa$, *необходимо и достаточно* $I^{-c}g(x) \in Q_\varkappa$.

Тогда решение единственно и выражается формулой

$$f(x) = x^r I^k x^s I^{-c-k-n} x^t I^n x^u g(x) \tag{13}$$

со значениями параметров из табл. 2 *при условиях* $\operatorname{Re} c > \lambda - \operatorname{Re} n \geqslant 0$, $\lambda \geqslant 0$, $\operatorname{Re} k \leqslant 0$, $r+s+t+u=0$.

Если пренебречь условиями применимости преобразования Меллина и существования интегралов и производных в классе Q, то все 14 представлений решения формально можно перевести в одно с помощью формулы $I^\eta x^{-\eta} I^\xi x^{-\xi}\varphi(x) = I^\xi x^{-\xi} I^\eta x^{-\eta}\varphi(x)$.

Подстановка в (13) $g(x)=x^{-s}$ приводит к равенству типа (10).

Если уравнение (9) задано при $0<a\leqslant t\leqslant x<\infty$, то результаты без учета $\varkappa$ остаются в силе с добавлением к теореме 3 условий $g^{(i)}(a) = R^{(j)}(a) = 0$, $i=0,1,\ldots,m-1$; $j=0,1,\ldots,l-1$.

Автор выражает благодарность академику АН БССР Ф. Д. Гахову за ценные советы и замечания.

Белорусский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
22 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Бейтмен, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1, М., 1965. [2] Li Ta, Proc. Am. Math. Soc., 11, № 2, 290 (1960). [3] D. V. Widder, Proc. Am. Math. Soc., 14, № 5, 812 (1963). [4] R. G. Buschman, SIAM Rev., 5, № 3, 232 (1963). [5] K. N. Srivastava, Math. Japan., 9, 85 (1964). [6] A. Erdelyi, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 12, № 1, 15 (1964). [7] T. P. Higgins, J. Soc. Industr. and Appl. Math., 12, № 3, 601 (1964). [8] Wimp Jet, Proc. Glasgow Math. Assoc., 7, № 1, 42 (1965). [9] E. R. Love, Proc. Edinburgh Math. Soc., 15, № 3, 169 (1967). [10] I. N. Sneddon, Glasgow Math. J., 9, № 1, 67 (1968). [11] T. R. Prabhakar, Proc. Cambridge Phil. Soc., 66, № 1, 71 (1969). [12] М. Б. Капилевич, Дифференциальные уравнения, 2, № 9, 1239 (1966). [13] М. Б. Капилевич, Там же, 4, № 8, 1465 (1968). [14] А. М. Гордеев, Волжск. матем. сборн., в. 6, 56 (1968). [15] Н. И. Бакиевич, Волжск. матем. сборн., в. 1, 42 (1963).