**Доклады Академии наук СССР**
1972. Том 202, № 6

УДК 517.11 *МАТЕМАТИКА*

В. А. ЛИФШИЦ

# ЛОКАЛЬНО АНАЛИТИЧЕСКАЯ КОНСТРУКТИВНАЯ ФУНКЦИЯ, НЕ ЯВЛЯЮЩАЯСЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ

*(Представлено академиком П. С. Новиковым 19 VII 1971)*

В этой заметке строится пример всюду определенной, всюду локально равномерно дифференцируемой конструктивной функции комплексной переменной, неограниченной на сегменте [0, 1] вещественной оси. Все рассмотрения проводятся в рамках конструктивной математики.

1. Определения используемых ниже основных понятий теории точечных множеств приведены в ([1]). Под функцией мы всюду понимаем комплексную функцию одной комплексной переменной, определенную на открытом множестве. О функциях $f$ и $g$ с общей областью определения $D$ мы говорим, что $g$ есть п р о и з в о д н а я * функции $f$, если для любого компактного множества $K$, вполне содержащегося в $D$, и любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что

$$|f(w)-f(z)-g(z)(w-z)| < \varepsilon|w-z|,$$

каковы бы ни были $w, z \in K$, для которых $|w-z| < \delta$. Функция, имеющая производную, называется дифференцируемой; функция, дифференцируемая во всей плоскости, называется целой. Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность функций, $f$ — функция, $A$ — открытое множество, содержащееся в пересечении областей определения функции $f, f_0, f_1, \ldots$ Мы говорим, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ с х о д и т с я к $f$ н а $A$, если, каковы бы ни были компактное множество $K$, вполне содержащееся в $A$, и $\varepsilon > 0$, для всех $m$, начиная с некоторого,

$$\left|\sum_{n=0}^{m} f_n(z) - f(z)\right| < \varepsilon \quad (z \in K).$$

Из результатов, доказанных в ([1]), гл. 5, вытекает, что дифференцируемые функции могут быть следующим образом охарактеризованы при помощи степенных рядов: для того чтобы функция $f$ была дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы в любом круге $\{z\colon |z-z_0| < r\}$, содержащемся в ее области определения, эту функцию можно было разложить в степенной ряд, расположенный по степеням $z-z_0$.

Будем говорить, что функция $f$ л о к а л ь н о д и ф ф е р е н ц и р у е м а, если любая точка из области определения $f$ обладает окрестностью, в которой $f$ дифференцируема. Для того чтобы функция $f$ была локально дифференцируема, необходимо и достаточно, чтобы каждая точка $z_0$ из ее области определения обладала окрестностью, в которой $f$ может быть разложена в степенной ряд, расположенный по степеням $z-z_0$.

Мы построим пример всюду определенной локально дифференцируемой функции, неограниченной на сегменте [0, 1] вещественной оси (и потому не являющейся целой). Идея этого примера близка к идее построенного

* Это определение производной эквивалентно соответствующему определению из ([1]).

А. А. Марковым примера дифференцируемой не всюду определенной функции, неограниченной на сегменте *.

2. Лемма 1. *Существует целая функция $p$ такая, что*

1) $\lim\limits_{\substack{z\to\infty \\ \operatorname{Re} z=0,\ \operatorname{Im} z\geqslant 0}} p(z)=\infty$;

2) *функция $p$ ограничена в дополнении полуполосы*

$$\Pi=\{z\colon\ |\operatorname{Re} z|<1,\quad \operatorname{Im} z>0\}.$$

Доказательство. Существует целая функция $E$, удовлетворяющая условиям: функция

$$z^2E(z)+z-z^2\exp(e^z)$$

ограничена в полуполосе

$$\{z\colon\ \operatorname{Re} z>0,\quad |\operatorname{Im} z|<\pi\};$$

функция

$$z^2E(z)+z$$

ограничена в дополнении этой полуполосы (см. ([3]), отдел III, задачи 158, 160). Тогда можно положить

$$p(z)=\varphi^2(z)T(\varphi(z))+\varphi(z),$$

где $\varphi(z)=-\pi i\cdot z$.

Лемма 2. *Для любого натурального $n$ существует целая функция $h_n$ такая, что*

1) $h_n(0)=2^n$;

2) *если $z$ не принадлежит полуполосе*

$$\Pi_n=\{z\colon\ |\operatorname{Re} z|<2^{-n},\ \operatorname{Im} z>2^{-n}\},$$

*то* $|h_n(z)|\leqslant 2^{-n}$.

Доказательство. Пусть $M$ — верхняя граница модуля функции $p$ из леммы 1 в дополнении полуполосы $\Pi$, и пусть для любого натурального $n$ вещественное $x_n\geqslant 0$ таково, что

$$|p(xi)|>2^{2n}M$$

при всех вещественных $x\geqslant x_n$. Положим

$$a_n=\max(2^n,x_n),\qquad h_n(z)=\frac{2^np(a_n^2z+a_ni)}{p(a_ni)}.$$

Очевидно, $h_n(0)=2^n$. Пусть $z\notin\Pi_n$. Тогда, как легко видеть, $a_n{}^2z+a_ni\notin \Pi$, откуда

$$|p(a_n^2z+a_ni|\leqslant M,\qquad |h_n(z)|\leqslant\frac{2^nM}{p(a_ni)}\leqslant 2^{-n}.$$

Лемма 3. *Существует последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ вещественных чисел такая, что*

1) $0\leqslant a_n\leqslant 1$;

2) *для любого вещественного $x$ существует вещественное $\varepsilon>0$ такое, что для всех $n$, начиная с некоторого,*

$$|a_n-x|\geqslant\varepsilon.$$

Доказательство. В силу теоремы 4.2 работы ([4]), существует последовательность $\{\Phi_n\}_{n=0}^{\infty}$ конечных непустых систем сегментов таких, что: 1) $\Phi_1$ состоит из единственного сегмента $[0,1]$; 2) каждый сегмент из $\Phi_{n+1}$

* Теорема о существовании такой функции опубликована без доказательства в [illegible]. Доказательство излагалось А. А. Марковым на Ленинградском семинаре по конструктивной математике в апреле 1965 г.

содержится в некотором сегменте из $\Phi_n$; 3) любое вещественное число обладает такой окрестностью, что для всех $n$, начиная с некоторого, эта окрестность не имеет общих точек ни с одним из сегментов, принадлежащих $\Phi_n$. Если для любого $n$ в качестве $a_n$ выбрать число, принадлежащее одному из сегментов системы $\Phi_n$, то последовательность $\{a_n\}$ будет обладать требуемыми свойствами.

Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность функций, $f$ — функция, $A$ — открытое множество, содержащееся в пересечении областей определения функций $f, f_0, f_1, \ldots$ Будем говорить, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ локально сходится к $f$ на $A$, если каждая точка из $A$ обладает окрестностью, в которой этот ряд сходится к $f$.

Лемма 4. *Пусть $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность дифференцируемых функций, все члены которой имеют общую область определения $D$. Если ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ локально сходится на $D$ к некоторой функции $f$, определенной на $D$, то $f$ локально дифференцируема.*

3. Положим

$$f_n(z)=(h_n(z-a_n)-\overline{h_n(\bar{z}-a_n)})^2, \quad n=0, 1, 2, \ldots$$

($h_n$ из леммы 2, $a_n$ из леммы 3, $\bar{z}$ — число, сопряженное с $z$). Очевидно, $f_n$ — целая функция, принимающая на вещественной оси вещественные неотрицательные значения. Пусть $z_0$ — произвольная точка комплексной плоскости. Положим $x=\operatorname{Re} z_0$. Пусть $\varepsilon>0$ таково, что для всех достаточно больших $n$ $|a_n-x|\geqslant\varepsilon$, и $r={}^1/_2\varepsilon$. Для всех достаточно больших $n$ и всех $z$ таких, что $|z-z_0|\leqslant r$,

$$|\operatorname{Re}(z-a_n)|=|\operatorname{Re}(\bar{z}-a_n)|>2^{-n},$$

откуда

$$|h_n(z-a_n)|, \quad |h^n(\bar{z}-a_n)|\leqslant 2^{-n},$$

$$|f_n(z)|\leqslant(2^{-n}+2^{-n})^2=2^{-2n+2}, \quad \sup_{|z-z_0|\leqslant r}|f_n(z)|\leqslant 2^{-2n+2}.$$

Отсюда вытекает, что ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$ локально сходится к некоторой всюду определенной функции $f$. В силу леммы 4 $f$ локально дифференцируема. Далее, для любого натурального $n$ $f(a_n)$ вещественно и

$$f(a_n)\geqslant f_n(a_n)=(2h_n(0))^2=2^{2n+2}.$$

Таким образом, $f$ обладает всеми требуемыми свойствами.

В описанной конструкции использовано одно упрощение, предложенное В. П. Оревковым.

Ленинградское отделение
Центрального экономико-математического института
Академии наук СССР

Поступило
11 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. Bishop, Foundations of Constructive Analysis, N. Y., 1967. [2] Г. С. Цейтин, И. Д. Заславский, Н. А. Шанин, Тр. Международн. конгресса математиков, М., 1968, стр. 253. [3] Г. Полиа, Г. Сеге, Задачи и теоремы из анализа, ч. I, М.-Л., 1937. [4] И. Д. Заславский, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 67, 385 (1962).