

А. М. САГАЛАКОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ГАРТМАНА

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 6 IX 1971)

1. Исследуется устойчивость течения проводящей вязкой несжимаемой жидкости между параллельными идеально проводящими пластинами поперек внешнего однородного магнитного поля. Задача линейной теории сводится к отысканию собственных значений для системы уравнений (¹)

$$\begin{aligned} L\psi &\equiv (U - c)(\psi'' - k^2\psi) + \frac{i}{\alpha R}(\psi^{IV} - 2k^2\psi'' - k^4\psi) = \\ &= \frac{G^2}{RR_m} \left[H_x(\Phi'' - k^2\Phi) - \frac{i}{\alpha}(\Phi''' - k^2\Phi') - H_x''\Phi \right], \quad (1) \\ H_x\psi - \frac{i}{\alpha}\psi' &= (U - c)\Phi + \frac{i}{\alpha R_m}(\Phi'' - k^2\Phi) \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\psi = \psi' = \Phi = 0 \quad \text{при } y = \pm 1. \quad (2)$$

Здесь

$$U = \frac{\text{ch } G - \text{ch } Gy}{\text{ch } G - 1}, \quad H_x = \frac{R_m}{G} \frac{\text{sh } Gy - y \text{ sh } G}{\text{ch } G - 1} \quad (3)$$

— соответственно профиль скорости и профиль напряженности продольного магнитного поля, ψ и Φ — комплексные амплитуды поперечных компонент возмущений скорости и поля, $c = X + iY$ — комплексная фазовая скорость возмущений — собственное значение задачи, k — модуль волнового числа, $\alpha = kx$, R — число Рейнольдса, R_m — магнитное число Рейнольдса, G — число Гартмана. Система координат и безразмерная форма выбраны обычным образом.

Случай малых R_m , сопряженный с анализом модифицированного уравнения Орра — Зоммерфельда

$$\begin{aligned} L\psi - \frac{iG^2}{\alpha R}\psi'' &= 0, \quad -1 < y < 1, \\ \psi(\pm 1) = \psi'(\pm 1) &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

подробно изучен в работах (^{1, 2}). Некоторые соображения относительно устойчивости при произвольных R_m высказаны в (^{3, 4}).

2. Положим в исходных уравнениях

$$\alpha R = k\tilde{R}, \quad \alpha R_m = k\tilde{R}_m, \quad \Phi = \tilde{\Phi}/\alpha; \quad (5)$$

тогда задача сведется к эквивалентной двумерной. Преобразования (5) подобны преобразованиям, проделанным Хантом для случая внешнего продольного магнитного поля (⁵). Знак «тильда» удобно далее опустить, а в исходных уравнениях положить $k = \alpha$. Последующий анализ приводит к выводу о наибольшей опасности двумерных возмущений.

Асимптотические выражения для c_n при малых αR , αR_m можно найти с помощью теории возмущений. В частности, для симметричной задачи (четность решения определяем условно по ψ) получим в нулевом прибли-

$$c_n^{(0)} = -i(\alpha R)^{-1} \left[\frac{(1 + \delta) \pi^2 (n + 1)^2}{8\delta} \pm \frac{\pi (n + 1)}{2 \sqrt{\delta}} \sqrt{\frac{(1 - \delta)^2}{16\delta} \pi^2 (n + 1)^2 - G^2} \right],$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, \quad \alpha \ll 1,$$
(6)

где δ — магнитное число Прандтля. Магнитное поле слабо воздействует на коротковолновые возмущения. Пользуясь этим фактом, найдем для небольших n и больших α

$$c_n^{(0)} = -\alpha/R \quad \text{или} \quad c_n^{(0)} = -\alpha/R_m.$$
(7)

Уже формулы (6), (7) наводят на мысль о целесообразности различения двух типов возмущений: магнитного и гидродинамического.

Когда внешнее магнитное поле отсутствует, колебания скорости и поля вообще находятся независимо друг от друга. При этом для возмущений магнитного типа $Y < -\alpha/R_m$, т. е. они всегда затухают.

Возмущение скорости и поля при $G \neq 0$ в общем случае тесно переплетаются друг с другом. Тип возмущений может быть при этом не выражен. Существуют, однако, два простых примера, в которых магнитные и гидродинамические эффекты выделяются в «чистом» виде. Ясно, что, когда R_m мало, магнитная часть спектра лежит глубоко в области устойчивости. Для изучения гидродинамической части спектра достаточно обратиться к задаче (4). Если же мало R , то определяющую роль в анализе стабильности играет магнитная часть спектра.

3. Поскольку использование здесь аналитических методов ограничено, широко применялся численный метод, развитый в работах (6, 7). В отличие от (7), автор употреблял несколько вычислительных схем, что позволило выбрать оптимальный вариант и обеспечить контроль в ходе проведения сложных расчетов. Численные эксперименты, проведенные на БЭСМ-6, обнаруживают весьма своеобразную картину устойчивости.

Рассмотрим вначале случай $G = 3$. Установлено, что область стабильности на плоскости (R, R_m) будет конечной. Она ограничивается результирующей кусочно-гладкой кривой, состоящей из двух гладких ветвей. Одна из ветвей продолжается из области малых R_m , другая линия начинается в районе малых R при $R_{m*} = 8,9$ (звездочкой обозначаем критические параметры). Пересечение этих ветвей происходит при $R_m = 10^4$. Следовательно, при $R_m > 10^4$ поток неустойчив по отношению к малым возмущениям при всех R . Для $R > 8 \cdot 7 \cdot 10^4$ имеет место нестабильность при всех R_m (случай $R = 0, R_m = 0$ здесь и ниже не принимаются во внимание). На рис. 1 кривая 1 отделяет область неустойчивости течения по отношению к симметричным возмущениям. Другая ветвь нестабильности отвечает антисимметричным колебаниям потока.

Похожими кривыми ограничивается зона устойчивости течения для характерных чисел Гартмана $G = 6$ и $G = 10$. В первом случае находим, что при $R_m > 3 \cdot 4 \cdot 10^4$ поток неустойчив для всех R , а при $R > 3 \cdot 7 \cdot 10^5$ он неустойчив для всех R_m . Гидродинамическая ветвь неустойчивости представлена на рис. 1, 2. Величина $\min R_{m*}$ равна 74. Для $G = 10$ течение неустойчиво при $R_m > 7 \cdot 3 \cdot 10^4$ для всех R . Если $R > 8 \cdot 7 \cdot 10^5$, то оно неустойчиво для всех R_m . Магнитная ветвь нестабильности представлена на рис. 2, 2.

Решения Локка справедливы с хорошей точностью до больших R_m . Предельные зависимости справедливы с максимальной погрешностью 2% при $R_m < 10^2 G$, если $G > 10$, а при $R_m < 10^3 G$ отличие от асимптотического выражения составляет величину порядка 10%. Для больших G обобщен известный результат Лундквиста. Определено

$$R_* = Gf(R_m/G), \quad \alpha_* = Gg(R_m/G), \quad \alpha_* \gg 1.$$
(8)

В (8) f и g — некоторые функции, вид которых можно найти из результатов численного анализа. Соотношения (8) описывают лишь отдельные части гидродинамической ветви неустойчивости.

Дополнительная неустойчивость, связанная при малых R с магнитно частью спектра, появляется в той области значений R_m , где предельные решения Локка еще справедливы с большой точностью. Минимально

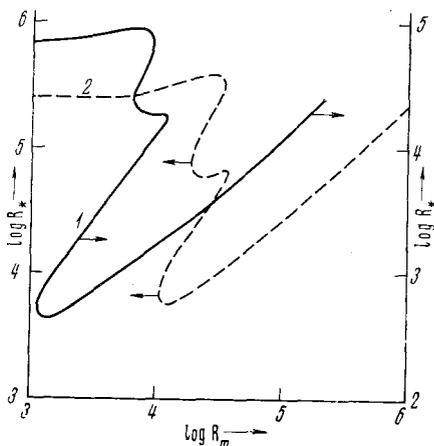


Рис. 1. Зависимость критического числа Рейнольдса R_* от магнитного числа Рейнольдса R_m для симметричных возмущений при различных G : 1 — $G = 3$, 2 — $G = 6$

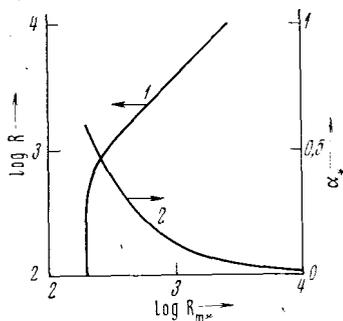


Рис. 2. Критические параметры при $G = 10$, определенные для магнитной ветви неустойчивости: 1 — $R(R_{m*})$, 2 — $\alpha_*(R_{m*})$

критическое R_m равно 66 и достигается при $G = 4,5$. С уменьшением G $\min R_{m*}$ растет. При малых G справедливо предельное соотношение

$$R_{m*} = 101/G^2, \quad R \ll R_{m*}. \quad (9)$$

В том, что $R_{m*} \sim G^{-2}$, можно убедиться непосредственно из задачи (1), (2), учитывая малость R и используя очевидные приближенные представления U и H_x в (3). С ростом $G \min R_{m*}$ также растет, причем при достаточно больших G этот тип неустойчивости, по-видимому, не развивается. На это указывают численные расчеты, а также определенные аналитические соображения.

В общем случае в неустойчивой области имеется целый ряд разновидностей нарастающих колебаний с разными волновыми числами, декрементами нарастания и фазовыми скоростями. Данное обстоятельство наглядно показывает, что имеется несколько типов неустойчивости, причем они могут развиваться одновременно.

Магнитные и гидродинамические явления очень сложно взаимодействуют друг с другом. Образуются своеобразные зоны перемежаемости устойчивости на плоскости (R, R_m) . Нетривиально воздействие магнитного поля на стабильность потока. Оно может как увеличивать устойчивость течения, так и уменьшать ее. Иногда существует наиболее опасное значение напряженности магнитного поля H_0 . В других случаях с ростом величины H_0 течение стабилизируется монотонно.

Природа неустойчивости различна в разных участках зоны неустойчивости. Причиной неустойчивости при небольших R_m является «парадоксальное» действие вязкости. Потеря устойчивости приведет здесь к образованию турбулентного движения, напоминающего в какой-то мере течение в отсутствие магнитного поля. Существенную роль для устойчивости при больших R_m играет конфигурация магнитного поля. Потеря устойчивости в данном случае будет связана с перестройкой конфигурации маг-

нитного поля. Возможно развитие сложного нестационарного движения жидкости и силовых линий.

Стационарное решение Гартмана справедливо при всех R и R_m . Поэтому могло казаться, что, накладывая слабое внешнее магнитное поле, можно получать какие-угодно большие индуцированные поля с ростом проводимости среды. Однако, начиная с некоторых значений R и R_m , в системе начинает развиваться неустойчивость, и такой генератор магнитного поля не реализуется в действительности. Результаты данной работы накладывают ограничения на величины напряженности магнитного поля H_x , которое может генерироваться таким ламинарным движением среды.

Автор выражает благодарность М. А. Гольдштику за внимание к работе, В. А. Сапожникову и В. Н. Штерну за полезные обсуждения.

Институт теплофизики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
3 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ R. C. Lock, Proc. Roy. Soc., **233A**, 189 (1955). ² А. М. Сагалаков, В. Н. Штерн, Журн. прикл. мех. и техн. физ., № 3, 127 (1970). ³ Р. Б. Павлов, Ю. А. Тарасов, ПММ, **24**, в. 4, 723 (1960). ⁴ Б. А. Тверской, ДАН, **143**, № 2 (1962). ⁵ J. C. R. Hunt, Proc. Roy. Soc., **293A**, 342 (1966). ⁶ В. А. Сапожников, Тр. Всесоюз. семинара по численным методам механики вязкой жидкости, **2**, «Наука», 1969. ⁷ М. А. Гольдштик, В. А. Сапожников, Изв. АН СССР, сер. Механика жидкости и газа, № 4, 102 (1971).