Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 3

УДК 517.91/.943 <u>*МАТЕМАТИКА*</u>

Г. Н. МИЛЬШТЕЙН

ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ РЕШЕНИЯМИ И СРЕДНЕКВАДРАТИЧНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

(Представлено академиком Н. Н. Красовским 15 XI 1971)

1. Пусть $\mathscr{X}$ — конечно-мерное пространство, наделенное нормой, с замкнутым телесным конусом K, $\mathscr{X}^*$ — сопряженный конус ([1-3]). Известно, что K^* замкнут, телесен и $(K^*)^* = K$. Пусть $X \in \mathscr{X}$, $Y \in \mathscr{X}$. Будем писать $X \geqslant Y$, если $X - Y \in K$, и $X > Y$, если $X - Y$ принадлежит внутренности конуса K. Аналогичные обозначения будут применяться и для элементов пространства $\mathscr{X}^*$.

Рассмотрим в $\mathscr{X}$ дифференциальное уравнение

$$dX / dt = A(t)X, \qquad t_0 \leqslant t < \infty, \tag{1,1}$$

с непрерывной по t операторной функцией $A(t)$. Во всех утверждениях п. 1 будем предполагать, что оператор Коши $F(t, \tau)$ для (1,1) положителен при $t \geqslant \tau \geqslant t_0$, т. е. $F(t, \tau)X \in K$, если $X \in K$.

Лемма 1. *Пусть при $t_0 \leqslant t < \infty$ выполняется равенство*

$$dG / dt + A^*(t)G = -H(t), \tag{1,2}$$

где $G(t) \in K^*$, $H(t) \in K^*$, и для $X \in K$

$$\alpha(t)\|X\| \leqslant (X, G(t)) \leqslant \beta(t)\|X\|, \tag{1,3}$$

$$(X, H(t)) \geqslant \gamma(t)\|X\|, \tag{1,4}$$

где $\alpha(t) > 0$, $\beta(t) > 0$, $\gamma(t) \geqslant 0$ — непрерывные функции.

Тогда

$$\|F(t, \tau)\| \leqslant \frac{c\beta(\tau)}{\alpha(t)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{\gamma(s)}{\beta(s)}\, dS\right), \tag{1,5}$$

где c — некоторая положительная постоянная.

Для доказательства леммы 1 следует рассмотреть функцию $V(t) = (F(t, \tau)X(\tau), G(t))$, где $X(\tau) \in K$. Используя (1,2), (1,3) и (1,4), нетрудно получить следующее неравенство для всех $X(\tau) \in K$:

$$\|F(t,\tau)X(\tau)\| \leqslant \frac{\beta(\tau)}{\alpha(t)} \exp\left(-\int_\tau^t \frac{\gamma(s)}{\beta(s)}\, ds\right)\|X(\tau)\|. \tag{1,6}$$

Ввиду телесности K из (1,6) следует (1,5).

Лемма 2. *Пусть $\psi(s, t) \geqslant \varphi(s, t) > 0$, $\mu(t) \geqslant \nu(t) \geqslant 0$ — непрерывные функции, для $X \in K$ выполняется соотношение*

$$\varphi(s, t)\|X\| \leqslant \|F(s, t)X\| \leqslant \psi(s, t)\|X\|, \qquad t_0 \leqslant t \leqslant s < \infty, \tag{1,7}$$

и интеграл $\int_{t_0}^\infty \psi(s, t_0)\mu(s)\,ds$ сходится.

Тогда для любой непрерывной функции $H(t) \in K^*$, $t_0 \leqslant t < \infty$, удовлетворяющей при $X \in K$ условию

$$\nu(t)\|X\| \leqslant (X, H(t)) \leqslant \mu(t)\|X\|, \tag{1,8}$$

существует $G(t) \in K^*$, $t_0 \leqslant t < \infty$, такая, что выполняется (1,2) *и для $X \in K$*

$$\int_t^\infty \nu(s)\varphi(s,t)\,ds\cdot\|X\| \leqslant (X, G(t)) \leqslant \int_t^\infty \mu(s)\psi(s,t)\,ds\cdot\|X\|. \tag{1,9}$$

Для доказательства леммы следует рассмотреть функцию $G(t) = \int_t^\infty F^*(s, t)H(s)dS$, учитывая, что из положительности $F(s, t)$ следует положительность $F^*(s, t)$.

Лемму 1 можно использовать для получения достаточных признаков устойчивости. Функции $(X, G(t))$ и $(X, H(t))$, положительные в K, играют ту же роль для уравнений с положительными решениями, что и функции Ляпунова во втором методе Ляпунова. Поэтому естественно назвать их линейными функциями Ляпунова. В том случае, когда (1,3) и (1,4) выполняются при положительных постоянных α, β и γ, лемма 1 дает достаточные условия экспоненциальной устойчивости. В случае экспоненциальной устойчивости в (1,8) в качестве ν и μ можно взять положительные постоянные и получить из леммы 2 необходимые условия экспоненциальной устойчивости.

Сформулируем также одно предложение для случая, когда $A(t)$ не зависит от t: $A(t) \equiv A$. Условие положительности оператора Коши, т. е. в данном случае оператора $\exp(A(t-\tau))$, сохраняется.

Теорема. *Для того чтобы тривиальное решение уравнения* (1,1) *было асимптотически устойчивым, необходимо, чтобы для каждого $Y \geqslant 0$ существовало решение $X \geqslant 0$ уравнения*

$$AX = -Y, \tag{1,10}$$

причем $X > 0$ при $Y > 0$, и достаточно, чтобы для некоторого $Y > 0$ существовало решение уравнения (1,10) $X > 0$.

Для доказательства достаточности следует учесть, что асимптотическая устойчивость тривиального решения уравнения $\dot{X} = AX$ эквивалентна асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения $\dot{G} = A^*G$, и воспользоваться леммой 1. Необходимость вытекает из следующего представления решения уравнения (1,10) в случае асимптотической устойчивости:

$$X = -A^{-1}Y = \int_0^\infty \exp(As)\,Y\,ds.$$

2. Рассмотрим в n-мерном пространстве E, наделенном некоторой нормой, систему n линейных дифференциальных уравнений

$$dx/dt = A(t)x, \qquad t_0 \leqslant t < \infty, \tag{2,1}$$

где $A(t)$ — матрица с непрерывными элементами.

Пусть $F(t, \tau)$ — оператор Коши для (2,1). Введем вещественное гильбертово пространство $\mathscr{X}$ симметричных $(n \times n)$-матриц со скалярным произведением $(X, Y) = \operatorname{sp} XY$. Известно ((3), гл. VIII, § 7), что множество всех неотрицательно определенных матриц есть телесный замкнутый конус K в $\mathscr{X}$, внутренность которого составляют положительно определенные матрицы, и что этот конус самосопряженный: $K^* = K$.

Рассмотрим в $\mathscr{X}$ уравнение

$$dX/dt = A(t)X + XA^*(t) \overset{\text{def}}{=} L(t)X. \tag{2,2}$$

Оператор Коши $F(t, \tau)$ для (2,2) связан с $F(t, \tau)$:

$$F(t, \tau)X = F(t, \tau)XF^*(t, \tau). \tag{2,3}$$

Из (2,3) нетрудно получить

$$c_0\|F(t, \tau)\| \leqslant \|F(t, \tau)\|^2 \leqslant c_1\|F(t, \tau)\|. \tag{2,4}$$

Поскольку оператор $F(t, \tau)$ положителен, что непосредственно вытекает из (2,3), результаты пункта 1 применимы к уравнению (1,2) и, в силу (2,4), соответствующим образом переносятся на систему (2,1). Эти результаты могут быть использованы для исследования устойчивости тривиального решения системы (2,1) [4, 5]. Уравнение (1,2) в данном случае приобретает вид

$$dX/dt + A^*(t)X + XA(t) = -Y. \tag{2,5}$$

3. Лемма 3. *Если оператор Коши для уравнения* (1,1) *и некоторый оператор* $B(t)$ *положительны, то оператор Коши для уравнения*

$$dX/dt = A(t)X + B(t)X \tag{3,1}$$

также положителен.

Доказательство. Пусть $X(\tau) \in K$. Рассмотрим уравнение Вольтерра

$$X(t) = F(t, \tau)X(\tau) + \int_\tau^t F(t, s)B(s)X(s)\,ds. \tag{3,2}$$

Применяя к уравнению (3,2) обычный метод последовательных приближений, получим доказательство леммы.

4. Рассмотрим систему стохастических уравнений Ито

$$dx(t) = A(t)x(t)\,dt + \sum_{r=1}^{k} B_r(t)x(t)\,dw_r(t), \tag{4,1}$$

где $A(t)$, $B_r(t)$ — матрицы порядка $n \times n$ с непрерывными по t элементами, $w_r(t)$, $r = 1, \ldots, k$, — независимые процессы броуновского движения [6-8]. Пусть $M(t) = \{m_{ij}(t)\}$, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, — матрица моментов второго порядка для решений системы (4,1). Как известно [8-11], $M(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dM}{dt} = A(t)M + MA^*(t) + \sum_{r=1}^{k} B_r(t)MB_r^*(t) \overset{\text{def}}{=} L(t)M + B(t)M, \tag{4,2}$$

$$B(t)M = \sum_{r=1}^{k} B_r(t)MB_r^*(t).$$

Будем рассматривать это уравнение в пространстве $\mathscr{X}$ с конусом K из п. 2. Так как оператор $B(t)$ положителен, то согласно п. 2 и лемме 3, оператор Коши для (4,2) положителен. Поэтому результаты п. 1 могут быть применены для исследования среднеквадратичной устойчивости [8] тривиального решения системы (4,1). Уравнение (1,2) в данном случае приобретает вид

$$\frac{dM}{dt} + A^*(t)M + MA(t) + \sum_{r=1}^{k} B_r^*(t)MB_r(t) = -\mathscr{K}. \tag{4,3}$$

5. Рассмотрим систему n уравнений ([12], [13]), находящуюся под воздействием марковской цепи,

$$dx / dt = A(t, u) x. \qquad (5,1)$$

Здесь $\{u(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$ — марковская цепь с N состояниями $u_1, \ldots, u_N$; $A_1(t) = A(t, u_1), \ldots, A_N(t) = A(t, u_N)$ — матрицы с непрерывными по t элементами порядка $n \times n$. Можно показать ([13]), что исследование среднеквадратичной устойчивости ([12]) тривиального решения системы (5,1) сводится к исследованию устойчивости тривиального решения системы

$$\frac{dM_r}{dt} = A_r(t) M_r + M_r A_r^*(t) - q_r M_r + \sum_{k \neq r} q_{kr} M_k, \quad r = 1, \ldots, N, \qquad (5,2)$$

где $M_r(t)$, $r = 1, \ldots, N$, — симметричные матрицы порядка $n \times n$, $q_r = -q_{rr}$, q_{kr}, $k \neq r$, — элементы инфинитезимальной матрицы процесса $\{u(t),\ 0 \leqslant t < \infty\}$. Введем вещественное гильбертово пространство $\mathscr{X}_N$, элементами которого являются векторы $M = \mathrm{colon}\,(M_1, \ldots, M_N)$, где $M_1, \ldots, M_N$ — симметричные матрицы порядка $n \times n$. Скалярное произведение в $\mathscr{X}_N$ определяется равенством $(M, \mathscr{K}) = \mathrm{sp}\, M_1 \mathscr{K}_1 + \ldots + \mathrm{sp}\, M_N \mathscr{K}_N$. Множество векторов M, все компоненты M_r которых — неотрицательно определенные матрицы, образует замкнутый телесный конус K_N в $\mathscr{X}_N$. Систему (5,2) будем рассматривать в $\mathscr{X}_N$. Для изучения поведения решений системы (5,2) можно привлечь результаты п. 1, поскольку, как это нетрудно заключить, используя лемму 3, оператор Коши системы (5,2) положителен в $\mathscr{X}_N$ с конусом K_N.

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
15 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Г. Крейн, М. А. Рутман, УМН, 3, в. 1 (1948). [2] М. А. Красносельский, Положительные решения операторных уравнений, М., 1962. [3] И. М. Глазман, Ю. И. Любич, Конечномерный линейный анализ, М., 1969. [4] И. Г. Малкин, Теория устойчивости движения, М., 1966. [5] Н. Н. Красовский, Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., 1959. [6] K. Ito, Memoirs Am. Math. Soc., 4 (1951). [7] И. И. Гихман, А. В. Скороход, Введение в теорию случайных процессов, М., 1965. [8] Р. З. Хасьминский, Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров, М., 1969. [9] M. A. Leibowits, J. Math. Phys., 4, 6 (1963). [10] И. И. Гихман, Сборн. Предельные теоремы и статистические выводы, Ташкент, 1966. [11] Г. Н. Мильштейн, Ю. М. Репин, ПММ, 31, в. 3 (1967). [12] И. Я. Кац, Н. Н. Красовский, ПММ, 24, в. 5 (1960). [13] Г. Н. Мильштейн, Ю. М. Репин, Дифференциальные уравнения, 5, № 8 (1969).