Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 517.945.7

МАТЕМАТИКА

В. А. БОРОВИКОВ

ОЦЕНКА СВЕРХУ ДЛЯ ВРЕМЕНИ СУЩЕСТВОВАНИЯ ГЛАДКОГО РЕШЕНИЯ КВАЗИЛИНЕЙНОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 13 IV 1971)

1. Как известно, у квазилинейной гиперболической системы

$$\begin{aligned} \partial u / \partial t + \partial f(u, v) / \partial x = 0, \\ \partial v / \partial t + \partial \varphi(u, v) / \partial x = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

может не существовать решения, непрерывно дифференцируемого при всех $t > 0$ даже в случае аналитических начальных данных.

В работе ([1]) даны оценки сверху для времени существования непрерывного периодического решения системы (1) в случае, когда начальные данные мало отличаются от константы, а система удовлетворяет условию Лакса (см. ниже). В этой заметке будут найдены аналогичные оценки для произвольных дважды дифференцируемых данных Коши.

Прежде чем формулировать соответствующую теорему, введем необходимые обозначения. Поскольку нас интересуют лишь гладкие решения системы (1), запишем ее в инвариантах Римана $z(u, v)$, $w(u, v)$:

$$\begin{aligned} \partial z / \partial t + \lambda(z, w) \partial z / \partial x = 0, \\ \partial w / \partial t + \mu(z, w) \partial w / \partial x = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где $\lambda(z, w) > \mu(z, w)$. Условие Лакса означает, что $\partial\lambda / \partial z \neq 0$; $\partial\mu / \partial w \neq 0$. Мы ограничимся условием $\partial\lambda / \partial z \neq 0$; без ограничения общности можно считать, что $\partial\lambda / \partial z > 0$.

Рассмотрим решение системы (2) с начальными условиями

$$z(x, 0) = z_0(x), \quad w(x, 0) = w_0(x), \tag{3}$$

с ограниченной функцией $w_0(x)$:

$$w_1 \leqslant w_0(x) \leqslant w_2. \tag{4}$$

Положим

$$A(z, w_0) = \min_{w_1 \leqslant w \leqslant w_2} \frac{\partial\lambda}{\partial z} \frac{1}{\lambda - \mu} \exp \int\limits_{w_0}^{w} \frac{\mu_w}{\mu - \lambda} dw, \tag{5}$$

где $\lambda = \lambda(z, w)$, $\mu = \mu(z, w)$, $\mu_w = \partial\mu / \partial w$.

Теорема. *Пусть дана система* (2), *у которой* $\partial\lambda / \partial z > 0$, *и непрерывно дифференцируемые начальные данные* (3), *причем* $w_0(x)$ *удовлетворяет* (4), *и существуют значения* x, *в которых* $\partial z_0 / \partial x < 0$.

Тогда непрерывное решение $z(x, t)$, $w(x, t)$ *системы* (2), *принимающее начальные значения* (3) *не существует при* $t \geqslant T$, *где*

$$T = \min_x [(\lambda(x) - \mu(x)) |\partial z_0 / \partial x| A(z_0(x), w_0(x))]^{-1}. \tag{6}$$

Здесь $\lambda(x) = \lambda(z_0(x), w_0(x))$, $\mu(x) = \mu(z_0(x), w_0(x))$, *функция* $A(z, w_0)$ *задается выражением* (5), *а минимум берется по всем значениям* x, *для которых* $\partial z_0 / \partial x < 0$.

Легко показать, что оценки работы ([1]) следуют из (6).

2. Перейдем к доказательству теоремы. Из уравнений (2) следует, что z постоянно вдоль λ-характеристик, т. е. интегральных кривых уравнения $dx/dt = \lambda(z, w)$ (где $z = z(x, t)$, $w = w(x, t)$ — решение системы (2)). Рассмотрим теперь две λ-характеристики L_1: $t = t_1(x)$ и L_2: $t = t_2(x)$, выпущенные из близких точек x_1 и x_2 на оси x, причем $x_1 > x_2$, а $z_1 = z_0(x_1) < z_2 = z_0(x_2)$, так что на интервале (x_1, x_2) $dz/dx < 0$. Поскольку на L_1 $z = z_1$, а на L_2 $z = z_2$, до тех пор пока существует непрерывное решение, эти характеристики не пересекаются. Теорема будет доказана, если привести к противоречию предположение о том, что характеристики L_1 и L_2 не пересекаются при $t \leqslant T_1$, где

$$T_1 = \left\{(\lambda(x_1) - \mu(x_1)) \cdot \left| \frac{dz_0(x)}{dx} \right| \cdot A(z_1)\right\}^{-1} + O(|z_1 - z_2|). \tag{7}$$

Действительно, чтобы получить оценку (6), достаточно в (7) положить $x_2 \to x_1$ и затем взять минимум по всем точкам x, в которых $dz_0/dx < 0$.

3. Все дальнейшие рассуждения будем проводить для фиксированного решения $z(x, t)$, $w(x, t)$ внутри области H, заключенной между характеристиками L_1 и L_2. В этой области $z_1 < z < z_2$, а w удовлетворяет условию (4) (поскольку w постоянно на μ-характеристиках: $dx/dt = \mu$).

Без ограничения общности можно считать, что в H $\lambda > 0$. В самом деле, внутри H z и w ограничены, а потому ограничена снизу и $\lambda(z, w)$: $\lambda(z, w) > -M$. Сделаем замену независимых переменных: $x' = x + Mt$; $t' = t$. Тогда система (2) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \partial z/\partial t' + \lambda' \partial z/\partial x' &= 0, \\ \partial w/\partial t' + \mu' \partial w/\partial x' &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

у которой $\lambda' = \lambda + M$; $\mu' = \mu + M$, а область H перейдет в полосу между двумя характеристиками L_1' и L_2' системы (8), в которой $\lambda' = \lambda + M > 0$.

Рассмотрим теперь поле направлений, заданное уравнением

$$dx/dt = p(z, w)\lambda(z, w), \tag{9}$$

где функция $p(z, w)$, $0 < p \leqslant 1$, будет определена ниже. Возьмем точку $x = \zeta$, $t = t_1(\zeta)$ на характеристике L_1, и выпустим из нее интегральную кривую уравнения (9) до пересечения в некоторой точке $x = \eta$, $t = t_2(\eta)$ с характеристикой L_2. Очевидно, $\eta = \eta(\zeta)$ и, поскольку правая часть (9) положительна, $\eta(\zeta) > \zeta$, так что

$$\eta(x_1) + \int_{x_1}^{\zeta} \frac{d\eta}{d\zeta} d\zeta = \eta(\zeta) > \zeta. \tag{10}$$

Здесь $\eta(x_1)$, $t_2(\eta(x_1))$ — координаты точки пересечения характеристики L_2 и интегральной кривой уравнения (9), выпущенной из точки $x = x_1$; $t = 0$.

Подберем в (9) такую функцию $p(z, w)$, чтобы левая часть (10) легко оценивалась. Тогда окажется, что при t, превосходящих T_1 из формулы (7), левая часть (10) заведомо меньше ζ. Это противоречие докажет, что характеристики L_1 и L_2 обязаны пересечься при $t \leqslant T_1$, откуда и следует теорема.

4. Зададим внутри полосы H функцию $p(z, w)$. Каждому значению z: $z_1 < z < z_2$, в области H соответствует единственная λ-характеристика $L(z)$, пересекающая ось x в некоторой точке $x(z)$. Обозначим через $w_0(z)$ значение начальной функции $w_0(x)$ в точке $x(z)$. Определим $p(z, w)$, как решение уравнения

$$p_w/(1 - p) + \lambda_w/(\lambda - \mu) = 0, \tag{11}$$

принимающее при $w = w_0(z)$ значение

$$p = 1 / (\lambda - \mu + 1). \tag{12}$$

Отсюда

$$p(z, w) = \frac{R(z, w)}{\lambda - \mu + R(z, w)}, \quad R(z, w) = \exp \int\limits_{w_0(z)}^{w} \frac{\mu_w}{\mu - \lambda}\, dw. \tag{13}$$

В этих формулах $\lambda = \lambda(z, w)$, $\mu = \mu(z, w)$, $\mu_w = \partial\mu / \partial w$. Очевидно, что на оси x

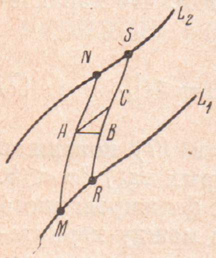

Рис. 1

$$p(z(x, 0), w(x, 0)) = p(z(x, 0), w_0(z(x, 0))) = \\ = (\lambda - \mu + 1)^{-1}.$$

5. Рассмотрим две бесконечно близкие интегральные кривые MN и RS уравнения (9), выходящие из точек M и R на характеристике L_1 (см. рис. 1). Возьмем на MN произвольную точку A, и выпустим из нее прямую $t = \mathrm{const}$ (до пересечения с RS в точке B) и λ-характеристику (до пересечения с RS в точке C). Положим $h = x(B) - x(A)$, $\Delta x = x(C) - x(A)$. Наконец, обозначим через d / dt дифференцирование вдоль кривой MN:

$$d / dt = \partial / \partial t + \xi\, \partial / \partial x,$$

где $\xi = p\lambda$ — правая часть (9). Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка относительно величины $h = AB$

$$dh / dt = h\xi_x = h(p_x\lambda + \lambda_x p); \qquad \Delta x = \lambda h / (\lambda - \xi) = h / (1 - p).$$

Отсюда

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \frac{h\xi_x}{1 - p} + \frac{hp_t + h\xi p_x}{(1 - p)^2} = h\frac{\lambda p_x + p\lambda_x - p^2\lambda_x + p_t}{(1 - p)^2}. \tag{14}$$

Но

$$p_t = p_z z_t + p_w w_t = -\lambda p_z z_x - \mu p_w w_x;$$
$$p_x = p_z z_x + p_w w_x; \quad \lambda_x = \lambda_z z_x + \lambda_w w_x.$$

Подставляя эти выражения в (14) и учитывая уравнение (11) для $p(z, w)$, получим

$$\frac{d}{dt}\Delta x = \Delta x p \lambda_z z_x.$$

Но поскольку $z_t = -\lambda z_x$, а $d / dt = \partial / \partial t + \xi\, \partial / \partial x$, можем записать

$$dz / dt = \partial z / \partial t + \xi \partial z / \partial x = (-\lambda + \xi) \partial z / \partial x = \lambda(p - 1) \partial z / \partial x,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\Delta x = -\Delta x \frac{p}{1 - p}\frac{\lambda_z}{\lambda}\frac{dz}{dt}.$$

Интегрируя это выражение вдоль кривой MN, получим

$$(\Delta x)_N = (\Delta x)_M \exp\left[-\int\limits_M^N \frac{p}{1 - p}\frac{\lambda_z}{\lambda}\frac{dz}{dt}\, dt\right].$$

Поскольку в точке M, как и на всей характеристике L_1, $z = z_1$, а в N $z = z_2$, причем $z_2 - z_1$ мало, имеем

$$\frac{(\Delta x)_N}{(\Delta x)_M} = \frac{x_S - x_N}{x_R - x_M} = 1 - \frac{p}{1 - p}\frac{\lambda_z}{\lambda}(z_2 - z_1) + O((z_2 - z_1)^2).$$

А так как кривые MN и RS бесконечно близки, $(x_S - x_N) / (x_R - x_M) = d\eta / d\zeta$, так что

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = 1 - \frac{p}{1-p}\frac{\lambda_z}{\lambda}(z_2 - z_1) + O((z_2 - z_1)^2). \qquad (15)$$

6. Воспользуемся полученным выражением для оценки левой части (10). Сперва найдем начальное значение $\eta = \eta(x_1)$. Поскольку при $t = 0$ $\quad p = 1/(\lambda - \mu + 1)$, легко видеть, что

$$\eta(x_1) = x_1 + \frac{1}{\lambda - \mu}(x_1 - x_2) + O((x_1 - x_2)^2) =$$
$$= x_1 + \frac{|z_2 - z_1|}{(\lambda - \mu)\,|\partial z/\partial x|} + O((z_2 - z_1)^2).$$

Подставляя в (10) найденные выражения для $d\eta / d\zeta$ и $\eta(x_1)$, получим неравенство, эквивалентное (10):

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \mu_1)\,|\partial z_1/\partial x|} \geqslant \int\limits_{x_1}^{\zeta} \frac{p}{1-p}\frac{\lambda_z}{\lambda}\,d\zeta + O(|z_2 - z_1|).$$

Здесь величины, стоящие в левой части, берутся в точке $x = x_1$, $t = 0$, а интегрирование идет вдоль λ-характеристики L_1: $x = \zeta$, $t = t_1(\zeta)$, выходящей из этой точки. Перейдем к переменной интегрирования t. Поскольку на L_1 $\quad d\zeta / dt = \lambda$, имеем

$$\int\limits_0^t \frac{p}{1-p}\lambda_z\,dt \leqslant \frac{1}{(\lambda_1 - \mu_1)\,|\partial z_1/\partial x|} + O(z_2 - z_1). \qquad (16)$$

Согласно рассуждениям п. 3, в окрестности L_1 непрерывное решение системы (2) существует лишь при t, удовлетворяющих (16). Используя (13), легко показать, что подынтегральное выражение в левой части (16) ограничено снизу функцией $A(z, w_0)$, заданной формулой (5). Поэтому из (16) следует

$$\frac{1}{(\lambda_1 - \mu_1)\,|\partial z_1/\partial x|} + O(z_2 - z_1) \geqslant \int\limits_0^t \frac{p}{1-p}\lambda_z\,dt \geqslant tA(z_1, w_0),$$

и это неравенство заведомо не выполняется при $t > T_1$, где T_1 задано формулой (7).

Тем самым доказательство теоремы закончено.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
19 III 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Glim, P. D. Lax, Mem. Am. Math. Soc., **101** (1970).