Доклады Академии наук СССР
1971. Том 201, № 1

УДК 517.512.6 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. БРУДНЫЙ

КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ И ЛОКАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 19 II 1971)

1°. В заметке излагаются результаты изучения связи между скоростью приближения заданной функции с помощью кусочно-полиномиальных и свойствами этой функции. Основой для их доказательства служат некоторые факты теории локальных приближений ([1], [2]).

2°. Пусть Q есть полуоткрытый справа s-мерный куб $\{x \in R^s\colon 0 \leqslant \leqslant x_i < 1\}$ и $\pi = \{q_i\}$ обозначает разбиение Q на полуоткрытые справа кубы q. Пусть еще P_k есть пространство многочленов степени k и $\Sigma_k(\pi)$ состоит из тех определенных на Q функций g, для которых $g|q_i \in P_k|q_i$ для всех $q_i \in \pi$. Для заданной функции $f \in L_p(Q)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, положим

$$\rho_k(f;\pi) = \inf_{g \in \Sigma_k(\pi)} \|f - g\|_{L_p(Q)}. \tag{1}$$

Тогда очевидно, что

$$\rho_k(f;\pi) = \Big\{\sum_{q_i \in \pi} J_f(q_i)^p\Big\}^{1/p}, \tag{2}$$

где функция множества $J_f(q)$ есть локальное наилучшее приближение f, т. е.

$$J_f(q) = E_k(f;q) = \inf_{g \in P_k} \|f - g\|_{L_p(q)}. \tag{3}$$

Из соотношения (2) следует связь рассматриваемых вопросов с теорией локальных приближений.

3°. В качестве меры уклонения функции f от кусочно-полиномиальных функций выберем сначала величину

$$R_{k,n}(f) = \sup_{m(\pi) \leqslant n^{-s}} \rho_k(f;\pi),$$

где $m(\pi) = \sup\limits_{q_i \in \pi} \operatorname{mes} q_i$. Близкая характеристика введена впервые в ([3]) для случая $f \in C(0, 1)$ (см. также ([4]) для $k = 1$; основные результаты этой статьи следуют из общих теорем, приведенных в ([3])).

Теорема 1. *Если $f \in L_p(Q)$ и $\omega_k(\tau)$ обозначает k-модуль непрерывности этой функции *, то*

$$R_{k,n}(f) \asymp \omega_{k+1}(n^{-1})$$

с постоянными, зависящими только от k.

Доказательство существенно опирается на один важный факт теории локальных приближений. Для его формулировки обобщим равенство (2), считая, что его правая часть определяет левую и в том случае, когда $\pi = \{q_i\}$ есть произвольная укладка (т. е. $q_i \cap q_j = \phi$), состоящая из кубов $q_i \subset Q$, параллельных Q.

---

* Т. е. $\omega_k(\tau) = \sup\limits_{|y| \leqslant \tau} \|\Delta_y^k f\|_{L_p}$, где $\Delta_y f = f(x + y) - f(x)$ и L_p-норма взята по области определения $\Delta_y^k(f;x)$ (как функции от x).

Т е о р е м а 2. *Если* $f \in L_p(Q)$, *то для любого* $\tau > 0$

$$\sup_{\pi} \rho_k(f;\ \pi) \asymp \omega_{k+1}(\tau),$$

где π *пробегает всевозможные укладки, состоящие из равных кубов объема* τ^s. *Постоянные зависят только от* k.

Используя теорему 1, можно получить целый ряд прямых и обратных теорем относительно рассматриваемого метода приближения. Ограничимся двумя примерами.

Т е о р е м а 3. *Если* $f \in L_p(Q)$, *то условие*

$$R_{k,n}(f) = O(n^{-\lambda}), \quad 0 < \lambda < k+1,$$

необходимо и достаточно для принадлежности f *к пространству Никольского* $H_p^\lambda(Q)$ (*его определение см. в* ([5])).

Т е о р е м а 4. *Для заданной функции* $f \in L_p(Q)$ *существует многочлен* f_0 *степени* $k-1$ *такой, что*

$$\sup_{\operatorname{mes} U = \tau} \left\{ \frac{1}{\operatorname{mes} U} \int_U |f - f_0|^p\, dx \right\}^{1/p} \leqslant \gamma(k) \sum_{n^s \leqslant 1/\tau} n^{s/p-1} R_{k,n}(f).$$

Левая часть этого неравенства не меньше $(f - f_0)^*(\tau)$, где $g^*(\tau)$ обозначает убывающую перестановку функции $g(x)$. Таким образом, из теоремы 4 получаем оценку функции распределения (меры множества бо́льших значений) для $f - f_0$. В связи с этим см. также ([6]), где впервые получена оценка функции распределения через локальные приближения с помощью постоянных.

С л е д с т в и е 1. *Если* $1 \leqslant p < q < \infty$, *то полагая* $\lambda = sq/p - s - 1$, *имеем*

$$\omega_{k+1}(\tau)_{L_q} \leqslant \gamma(k) \left\{ \sum_{n \geqslant 1/\tau} n^\lambda |R_{k,n}(f)_{L_p}|^q \right\}^{1/q}.$$

З а м е ч а н и е. В случае $k = 0$ следствие эквивалентно (благодаря теореме 1) теореме вложения из ([7]) и ее обобщению на многие переменные, содержащемуся в ([8]).

4°. Пусть теперь для $f \in L_p(Q)$

$$r_{k,n}(f) = \inf_{|\pi| \leqslant n} \rho_k(f;\ \pi),$$

где $|\pi|$ — число элементов разбиения π. Эта аппроксимативная характеристика введена в ([9]), где рассмотрен вопрос о скорости убывания $r_{k,n}(f)$ для функций из $W_q^\lambda(Q)$. (Случай приближения функций ограниченной вариации ступеньками рассмотрен в ([10]).)

Всюду ниже $f \in C(0,\ 1)$; весьма вероятно, что первая из приводимых ниже теорем имеет существенно одномерный характер. Нам понадобятся следующие два о п р е д е л е н и я.

Функция интервала $J(q)$, $q \subset [0,\ 1]$, имеет о г р а н и ч е н н у ю Ψ - в а р и а ц и ю, если

$$V_\Psi(J) = \sup_{\pi} \sum_{q_i \in \pi} \Psi(|J(q_i)|) < +\infty; \tag{4}$$

если же вместо (4) выполняется условие

$$\hat{V}_\Psi(J) = \varliminf_{m(\pi) \to 0} \sum_{q_i \in \pi} \Psi(|J(q_i)|) < +\infty,$$

то скажем, что J имеет о г р а н и ч е н н у ю Ψ - в а р и а ц и ю в с л а б о м с м ы с л е.

Всюду ниже Ψ — монотонно возрастающая, равная нулю в нуле функция, заданная на $[0, +\infty)$, а Ψ^{-1} — обратная к ней.

Теорема 5. *Если $J_f(q)$ (см. (3)) как функция интервала имеет на $[0, 1]$ Ψ-вариацию, равную A, то*

$$r_{k,n}(f) \leqslant \Psi^{-1}(A/n).$$

Следствие 2. *Пусть C^kV есть множество функций $f \in C^{k-1}(0, 1)$ таких, что $f^{(k-1)}$ абсолютно непрерывна и* $\mathrm{Var}\, f^{(k)} \leqslant 1$.

Тогда

$$r_{k,n}(C^kV) = \sup_{f \in C^kV} r_{k,n}(f) = \frac{\beta_k}{2^{k+1}k!} n^{-k-1},$$

где $\beta_k = E_k(x^{k-1}|x|; -1, 1)$.

Замечания. 1) Вот несколько первых значений β_k: $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1/2$, $\beta_2 = 3 - 2\sqrt{2}$, $\beta_3 = 2/27$; далее $2^{-2k+1} < \beta_k < 2^{-k+1}$. Было бы интересно получить асимптотику β_k при $k \to \infty$. 2) Можно получить также оценку $r_{k,n}(W_p^k)$, где

$$W_p^k = \{f \in C(0, 1): \|f^{(k)}\|_{L_p} \leqslant 1\}.$$

Теорема 6. *Если для всех $n \geqslant 1$*

$$r_{k,n}(f) \leqslant \Psi(A/n),$$

то $J_f(q)$ имеет Ψ^{-1}-ограниченную вариацию на $[0, 1]$ в слабом смысле, причем $\tilde{V}_{\Psi^{-1}} \leqslant 2A$.

Следствие 3. *Если $f \in C^k(0, 1)$ и $f^{(k)}$ имеет ограниченную p-вариацию (в смысле Винера — Л. Юнг), не превышающую A, то*

$$r_{k,n}(f) \leqslant c(k) \frac{A}{n^{k+1/p}}. \tag{5}$$

Обратно, если (5) имеет место для всех $n \geqslant 1$ и $f \in C^k(0, 1)$, то $\mathrm{Var}_p\, f^{(k)} \leqslant c_1(k) A$.

5°. В случае $f \in C(0, 1)$ можно еще рассматривать приближение так называемыми сплайн-функциями (см. ([11])), считая что inf в (1) взят по $g \in \Sigma_k(\pi) \cap C^{k-1}(0, 1)$. Обозначим соответствующие величины через $\tilde{R}_{k,n}(f)$ и $\tilde{r}_{k,n}(f)$. Очевидно, они больше соответственно величин $R_{k,n}(f)$ и $r_{k,n}(f)$. С другой стороны, имеет место

Теорема 7. *Для $f \in C(0, 1)$ имеют место неравенства*

$$\tilde{R}_{k,n}(f) \leqslant c(k) R_{k,n}(f);$$

кроме того, если $N = k(n-1) + n$ при $k > 1$ и $N = n$ при $k = 1$, то

$$\tilde{r}_{k,N}(f) \leqslant 2r_{k,n}(f).$$

Следовательно, из результатов пунктов 3°, 4° могут быть получены прямые и обратные теоремы в этой ситуации. Другие результаты в этом направлении см. в ([12], [13]).

Днепропетровский химико-технологический институт

Поступило 24 I 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Брудный, Диссертация, Днепропетровск, 1965. [2] Ю. А. Брудный, Тр. Московск. Математич. общ., 24 (1971). [3] Ю. А. Брудный, И. Е. Гопенгауз, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 4, 723 (1963). [4] J. Nitsche, Math. Zs., 109, 2, 97 (1969). [5] С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969. [6] F. John, L. Nirenberg, Comm. Pure Appl. Math., 14, 415 (1961). [7] П. Л. Ульянов, Изв. АН СССР, сер. матем., 32, 649 (1968). [8] Н. Т. Темиргалиев, Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем., № 5, 90 (1970). [9] М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, Матем. сборн., 73, 331 (1967). [10] J.-P. Kahane, Teoria constructiva de funciones. Cursos y semin. mat. Univ. Buenos-Aires, № 5 (1961). [11] J. H. Alberg, E. N. Nilson, J. L. Walsh. The Theory of Splines and their Application, N. Y.— London, 1967. [12] Ю. И. Субботин, Н. И. Черных, Матем. заметки, 7, 1, 31 (1970). [13] В. А. Попов, Бл. Х. Сендов, Матем. заметки, 8, 2, 137 (1970).