Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 532.54 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Э. Л. БУРШТЕЙН, Л. С. СОЛОВЬЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком А. Д. Сахаровым 17 VIII 1971)

Из всего многообразия возможных гидродинамических течений, удовлетворяющих заданным граничным условиям, в действительности реализуются лишь устойчивые течения, причем при больших числах Рейнольдса условия устойчивости могут быть найдены в приближении идеальной жидкости. Некоторые общие черты таких устойчивых конфигураций могут быть выявлены на примере рассматриваемых ниже течений.

1. Устойчивость цилиндрического течения. В современной теории гидродинамической устойчивости принято считать, что имеются два основных прототипа неустойчивости, которые достаточно полно представлены двумя простейшими типами течения: продольным течением Пуазейля и азимутальным течением Куэтта ([1]). Однако рассмотрение течения, имеющего одновременно как продольную, так и азимутальную составляющие скорости, в рамках цилиндрической геометрии, приводит к качественно новым результатам.

Для исследования устойчивости течения при цилиндрической геометрии достаточно рассмотреть устойчивость относительно каждой отдельной винтовой гармоники смещения $\xi = \xi(r)\exp(ikz - im\varphi - i\omega t)$ в цилиндрических координатах r, φ, z. При этом уравнения малых колебаний идеальной несжимаемой жидкости сводятся к одному уравнению ([2]) для функции $f(r) = r\xi_r / y$, где $y = av_z - v_\varphi / r - \omega / m$, $\alpha = k / m$, $\beta = 1 + \alpha^2 r^2$, ρ — плотность,

$$\left(\frac{\rho r y^2}{\beta} f'\right)' - \left\{\frac{\rho m^2 y^2}{r} - \frac{4\alpha^2 \rho v_\varphi^2}{\beta r} - \left(\frac{2\rho y v_\varphi}{\beta r} + \frac{\rho v_\varphi^2}{r^2}\right)'\right\} f = 0. \tag{1}$$

Отсюда для функции $F = r\xi_r$ при $\rho = \mathrm{const}$ вытекает уравнение

$$\left(\frac{rF'}{\beta}\right)' - \left\{\frac{m^2}{r} - \frac{1}{y}\left[\frac{(rv_\varphi)' - ar^2 v_z'}{\beta r}\right]' - \frac{2av_\varphi}{\beta r y^2}(v_z + arv_\varphi)'\right\} F = 0. \tag{2}$$

Введение вихревого поля $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{v}$ при учете равенств $j_z = \frac{1}{r}(rv_\varphi)'$, $j_\varphi = -v_z'$ позволяет переписать уравнение (2) в эквивалентной форме

$$\left(\frac{r}{\beta} F'\right)' - \left\{\frac{m^2}{r} - \frac{1}{y}\left(\frac{j_z + arj_\varphi}{\beta}\right)' + \frac{2av_\varphi}{\beta r y^2}(j_\varphi - arj_z)\right\} F = 0. \tag{3}$$

Течение будет неустойчивым, если существует решение уравнений (1) — (3), обращающееся в нуль при $r = 0$ и $r = a$, для которого собственное значение частоты ω имеет положительную мнимую часть. Как это следует из уравнения (3), для безвихревого равновесного течения $\mathbf{j} = \operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$ построение таких решений невозможно. Это согласуется с общими выводами работы ([3]) об устойчивости безвихревых течений.

В случае, когда существует такая система координат, движущаяся с постоянной скоростью вдоль оси z, в которой линии тока не перекрещиваются ($v_\varphi / (rv_z) = \mathrm{const}$), можно выбрать шаг винта возмущения $L = 2\pi / \alpha = 2\pi r v_z / v_\varphi$ совпадающим с шагом винта линий тока. При этом величина

y становится равной $\omega / m = \text{const}$ и, как это следует из общей теории собственных значений ([4]), можно построить решение уравнения (2) с $\omega^2 < 0$, если не выполняется условие

$$v_\varphi^2 \left[v_z v_z' + \frac{v_\varphi}{r} (r v_\varphi)' \right] > 0, \qquad (4)$$

которое, таким образом, является необходимым условием устойчивости.

В соответствии с известными результатами отсюда вытекает, что в пределе исчезающей вязкости течение Пуазейля ($v_\varphi = 0$) находится в безразличном равновесии, а течение Куэтта ($v_z = 0$) становится неустойчивым, если не соблюдается условие Рэлея $v_\varphi (r v_\varphi)' > 0$. Из уравнения (4) видно также, что добавление малого вращения приводит к неустойчивости течения Пуазейля при $v_z v_z' < 0$ и область устойчивости появляется вновь только при достаточно быстром вращении, когда выражение в квадратных скобках в (4) становится положительным. Необходимая движущаяся система координат, в которой $v_\varphi / (r v_z) = \text{const}$, существует, например, в случае, когда v_z и v_φ / r имеют параболическое распределение:

$$v_z = v_0 (1 - r^2 / a^2), \qquad v_\varphi / r = \nu_0 (1 - r^2 / R^2).$$

При этом условие (4) выполняется в интервале $0 < r < a$, если $\nu_0^2 a^2 > v_0^2 (1 - 2a^2 / R_2)^{-1} R^2 / a^2$. Необходимая для устойчивости скорость вращения минимальна, когда $R = 2a$, и в этом случае должно быть $\nu_0 a > 2\sqrt{2} v_0$.

Условия устойчивости (4) легко обобщить на случай сжимаемой жидкости, когда уравнение для функции $f(r)$ представляется в виде ([2])

$$\left(\frac{\rho r y^2 c^2 f'}{\beta c^2 - r^2 y^2} \right)' - \left\{ \frac{m^2 \rho y^2}{r} - \frac{4\alpha^2 \rho v_\varphi^2}{\beta r} - \left(\frac{\beta \rho c^2 q}{\beta c^2 - r^2 y^2} \right)' + \frac{\beta \rho r q^2}{\beta c^2 - r^2 y^2} \right\} f = 0. \qquad (5)$$

Здесь $c = \sqrt{\gamma p / \rho}$ — скорость звука, γ — показатель адиабаты, $q = 2 y v_\varphi / (\beta r) + v_\varphi^2 / r^2$.

Вытекающее из (5) необходимое условие устойчивости при тех же предположениях, которые были сделаны при выводе (4), имеет вид

$$v_\varphi^2 \left\{ 2 \left[v_z v_z' + \frac{v_\varphi}{r} (r v_\varphi)' \right] + v^2 \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma p} \frac{\rho v_\varphi^2}{r} - \frac{T'}{T} \right) \right\} > 0. \qquad (6)$$

Как показывает выражение (6), при постоянстве температуры T сжимаемость жидкости является стабилизирующим фактором.

2. Об устойчивости цилиндрических разрывов. Неустойчивость вихревого течения проявляется также в неустойчивости тангенциальных разрывов скорости. Проинтегрируем уравнение (1) в окрестности цилиндрической поверхности радиуса $r = r_0$, на которой возможны разрывы плотности ρ и компонент векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{j}$. Тогда получим

$$\left\langle \rho y^2 \frac{r f'}{f} \right\rangle + \left\langle 2 \rho y \frac{v_\varphi}{r} + \rho \frac{\beta v_\varphi^2}{r^2} \right\rangle = 0, \qquad (7)$$

где угловыми скобками обозначены разности $\langle A \rangle = A_e - A_i$ соответствующих величин при стремлении $r \to r_0$ с внешней и внутренней стороны. Уравнение (7), записанное через функцию $F = y f$, имеет вид

$$\left\langle \rho y^2 \frac{r F'}{F} \right\rangle + \left\langle \rho y (j_z + \alpha r j_\varphi) + \frac{\rho \beta v_\varphi^2}{r^2} \right\rangle = 0. \qquad (8)$$

При подстановке в (7) или (8) решений уравнений (1)—(3), удовлетворяющих граничным условиям обращения в нуль при $r = 0$ внутри и при $r = a$ вне цилиндра $r = r_0$, получим дисперсионное уравнение для определения собственных значений ω. Для однородных потоков $v_z = \text{const}$, $v_\varphi / r = \text{const}$ внутри и вне цилиндра $r = r_0$ решения уравнения (1) выражаются через бесселевы функции ([2])

$$f(r) = \varepsilon Z_m (\varkappa r) - \alpha \varkappa r Z_m' (\varkappa r),$$

где $\varepsilon = 2av_\varphi / ry$, $\varkappa^2 = \alpha^2 m^2 - \varepsilon^2$ и задача об устойчивости цилиндрических разрывов решается до конца ([5]). Однако при этом частота ω входит в выражения для функций $f_{i,e}$, и мы приходим к трансцендентному дисперсионному уравнению. В случае безвихревого течения решения уравнения (3) не зависят от частоты ω и условие устойчивости разрыва можно записать в явном виде

$$\left\langle \rho y_0 \frac{rF'}{F} \right\rangle^2 - \left\langle \frac{\rho r F'}{F} \right\rangle \left\langle \rho y_0^2 \frac{rF'}{F} + \rho\beta \frac{v_\varphi^2}{r^2} \right\rangle \geqslant 0, \tag{9}$$

где $y_0 = \alpha v_z - v_\varphi / r$. Неравенство (9) позволяет рассмотреть, например, устойчивость потока с $v_{zi} = \text{const}$, $v_{\varphi i} = 0$; $v_{ze} = \text{const}$, $rv_{\varphi e} = \text{const}$. Заметим, что в предельных случаях $\rho_i \to 0$ или $\rho_e \to 0$ неустойчивость разрыва продольного потока $(v_\varphi = 0)$ исчезает. При наличии же вращения жидкости во внешней области при $\rho_i \to 0$ получаем из условия устойчивости (9)

$$v_{\varphi e}^2 F_e'/F_e \leqslant 0. \tag{10}$$

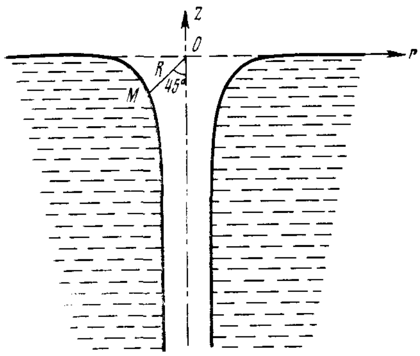

Рис. 1

Поскольку отношение $F_e' / F_e < 0$ (например, при условии $F_e(r) \to 0$ при $r \to \infty$, $F_e = rK_m'(kr)$), рассматриваемое течение оказывается устойчивым, причем устойчивость улучшается при увеличении скорости вращения.

Указанная устойчивость тангенциальных разрывов продольной скорости в случае, когда плотность одной из жидкостей стремится к нулю, объясняет то, что теория струй идеальной несжимаемой безвихревой жидкости хорошо описывает наблюдаемые течения лишь при условии малого отношения плотностей по обе стороны от разрыва ([6]). Иллюстрацией устойчивости вращающейся жидкости снаружи от области с малой плотностью является, например, образование соответствующего вращающегося течения с воронкой при стоке воды в ванной.

В проведенном выше рассмотрении устойчивости идеальной жидкости разрывы стабильны лишь при равном нулю отношении плотностей. В случае малого, но конечного отношения плотностей необходимо, разумеется, принимать во внимание стабилизирующее действие вязкости.

3. Об одном точном решении уравнений Навье — Стокса для вращающейся жидкости со свободной границей в поле силы тяжести. Для установившегося аксиально-симметричного течения несжимаемой жидкости в поле силы тяжести можно получить точное решение уравнений Навье — Стокса

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} = -\nabla(p + \rho g z) + \rho\nu\nabla^2\mathbf{v}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{11}$$

если предположить, что $\mathbf{v} = \mathbf{v}(r)$. В таком течении

$$v_r = a/r, \quad v_\varphi = b/r, \quad v_z = c/r^4. \tag{12}$$

Функция тока ψ, определяемая равенствами $rv_r = -\partial\psi/\partial z$, $rv_z = \partial\psi/\partial r$, и пропорциональная ей функция $p - p_0$ соответственно равны

$$\psi = -az - c/(2r^2), \quad p - p_0 = -\rho(gz + (a^2 + b^2)/(2r^2)), \tag{13}$$

причем $a = -4\nu$. Форма свободной поверхности жидкости $p = p_0$ изображена на рис. 1. В качестве размера, характеризующего ширину воронки, примем расстояние R от точки O до точки M. При этом квадрат скорости вращения жидкости оказывается равным

$$v_\varphi^2 = \frac{gR^3}{\sqrt{2}\,r^2}\left(1 - \frac{16\sqrt{2}\,\nu^2}{gR^3}\right). \qquad (14)$$

При достаточно малом коэффициенте вязкости ν выражение (14) описывает вращающееся течение, а при фиксированном $\nu^2 = gR^3 / (16\sqrt{2})$ — течение без вращения. Согласно проведенному выше анализу устойчивости разрывов, можно ожидать, что вращающийся поток (14) представляет устойчивое образование.

Радиотехнический институт
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 VIII 1970

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Линь Цзя-цзяо, Теория гидродинамической устойчивости, М., 1958. [2] Л. С. Соловьев, В сборн. Вопросы теории плазмы, М., 1963, стр. 245. [3] Э. Л. Бурштейн, Л. С. Соловьев, ДАН, **203**, № 6 (1972). [4] Дж. Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнения, М., 1953, стр. 198. [5] Л. С. Соловьев, Ю. Н. Явлинский, ДАН, **197**, 309 (1971). [6] Г. Биркгоф, Гидродинамика, М., 1954.