

УДК 519.21+517.4.5

МАТЕМАТИКА

Б. М. ГУРЕВИЧ

**ЕДИНСТВЕННОСТЬ МЕРЫ С МАКСИМАЛЬНОЙ ЭНТРОПИЕЙ
ДЛЯ СИМВОЛИЧЕСКИХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ,
БЛИЗКИХ К МАРКОВСКИМ**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 X 1971)

Будем называть символической динамической системой ограничение сдвига в пространстве последовательностей на некоторое инвариантное замкнутое подмножество этого пространства. Более точно, пусть M — полное метрическое пространство и $X = \prod_{-\infty}^{\infty} X_i$, где $X_i = M$. Сдвиг T , определяемый равенством

$$T\{x_i\} = \{x'_i\}, \quad x'_i = x_{i+1}, \quad \{x_i\} \in X,$$

является, очевидно, гомеоморфизмом пространства X . Любое замкнутое множество $Y \subset X$, инвариантное относительно T , порождает символическую динамическую систему (Y, T) .

Инвариантное замкнутое множество $Y \subset X$ назовем марковским множеством порядка n , если найдется такое множество $A \subset M^{n-1}$, что последовательность $\{x_i\}$ принадлежит Y в том и только том случае, когда любой ее отрезок длины $n+1$ содержится в A . Символическую динамическую систему (Y, T) , отвечающую марковскому множеству Y порядка n , будем называть марковской системой или символической цепью Маркова n -го порядка (в литературе встречаются также термины «топологическая цепь Маркова», «система конечного порядка»).

Каждая символическая цепь Маркова n -го порядка (Y, T) топологически подобна некоторой цепи 1-го порядка (Y', T) . Соответствующее отображение множества Y на множество Y' можно получить, если сопоставить последовательности $\{x_i\} \in Y$ последовательность $\{x'_i\} \in Y'$, где $x'_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1})$ — отрезок последовательности $\{x_i\}$.

По марковскому множеству 1-го порядка Y можно построить ориентированный граф Γ , из каждой вершины которого выходит и в каждую вершину входит хотя бы одно ребро. В качестве вершин Γ надо взять те точки пространства M , которые встречаются среди элементов последовательностей, принадлежащих Y . Ребро с началом $a \in M$ и концом $b \in M$ должно присутствовать в Γ в том и только том случае, когда хотя бы одна последовательность $\{x_i\} \in Y$ содержит отрезок (a, b) . Описанное соответствие между марковскими множествами первого порядка и ориентированными графами является, очевидно, взаимно однозначным. Марковское множество Y , отвечающее при этом соответствию графу Γ , естественно отождествляется с множеством бесконечных в обе стороны путей графа Γ .

В дальнейшем мы ограничимся случаем, когда M — конечное множество с дискретной топологией и, следовательно, всё X и любое его замкнутое подмножество — компактные метрические пространства.

Пусть $H(Y)$ — совокупность инвариантных мер динамической системы (Y, T) , т. е. нормированных мер на Y , сохраняемых сдвигом T . Обозначим

$h_\mu(Y)$ энтропию преобразования T , вычисленную по мере $\mu \in H(Y)$. Верхняя грань $h(Y)$ значений функционала $h_\mu(Y)$, $\mu \in H(Y)$, называемая топологической энтропией динамической системы (Y, T) , может быть найдена непосредственно по Y , без обращения к инвариантным мерам (см. ^(2, 1, 3)). Нетрудно показать, что в нашем случае верхняя грань достигается для любого множества Y (см. ⁽⁵⁾).

Вопрос о единственности меры с максимальной энтропией *, которому посвящена эта заметка, решается для разных множеств Y по-разному. Как показывают примеры (см. ^(6, 7)), единственность не может быть обеспечена никакими из известных условий топологической неразложимости системы (Y, T) , включая минимальность. С другой стороны, в работе ⁽⁴⁾ (см. также ⁽⁴⁾) установлена единственность меры с максимальной энтропией для символических цепей Маркова. Ниже будет описан значительно более широкий класс символических динамических систем, для которых имеет место аналогичный результат.

Прежде всего заметим, что всякое инвариантное замкнутое множество Y каноническим образом представимо в виде $Y = \bigcap_{n=1}^{\infty} Y_n$, где Y_n — марковское множество порядка n и $Y_{n+1} \subset Y_n$. Множество Y_n определяется тем, что отрезки длины $n+1$, входящих в него последовательностей совпадают с отрезками длины $n+1$ последовательностей, принадлежащих Y .

Рассмотрим, далее, произвольный конечный ориентированный граф Γ . Пусть i, j — две его вершины (не обязательно разные) и $\alpha(i, j)$ — длина кратчайшего пути с началом i и концом j (если путей, ведущих из i в j , нет, то полагаем $\alpha(i, j) = \infty$). Величину $\alpha(\Gamma) = \max_{i,j} \alpha(i, j)$ назовем индексом связности графа Γ .

Пусть теперь задана символическая динамическая система (Y, T) . Марковское множество n -го порядка Y_n , входящее в каноническое представление множества Y , отобразим описанным выше способом на марковское множество первого порядка Y'_n , которому отвечает ориентированный граф Γ_n , и обозначим соответственно $\alpha_n = \alpha_n(Y)$ и $\lambda_n = \lambda_n(Y)$ индекс связности графа Γ_n и максимальное собственное значение его матрицы смежности (заметим, что $\log \lambda_n = h(Y_n)$, см. ⁽⁴⁾). Определим, кроме того, $\lambda(Y) = \lambda$ равенством $h(Y) = \log \lambda$ и положим $r_n(Y) = r_n = h(Y_n) - h(Y)$ (легко проверить, что $r_n \searrow 0$, $\alpha_n \nearrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$).

Основной результат. *Существуют такие абсолютные постоянные $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, что если символическая динамическая система (Y, T) удовлетворяет при каком-нибудь $\delta > 0$ условию*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \lambda_n^{c_1 \alpha_n} (\lambda + \delta)^{c_2 n} (\lambda_n^{-\alpha_n} - 1)^{-4} < 2, \quad (1)$$

то она обладает единственной инвариантной мерой с максимальной энтропией (эта мера автоматически оказывается эргодической).

В случае, когда $h(Y) > 0$, (1) можно заменить более простым условием

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \lambda_n^{c_1 \alpha_n + c_2 n} < 2. \quad (2)$$

Таким образом, единственность меры с максимальной энтропией для системы (Y, T) гарантируется достаточно высокой скоростью аппроксимации множества Y марковскими множествами Y_n .

В ходе доказательства выясняется, что в неравенстве (2) заведомо можно положить $c_1 = 16$, $c_2 = 8 + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$. Эти оценки допускают даль-

* Рассматриваемая задача близка к известной в статистической физике проблеме единственности трансляционно инвариантного равновесного состояния (см. например, ⁽⁸⁾).

нейшее уточнение. Важно, однако, заметить, что существует нетривиальная граница для подобных уточнений. Об этом свидетельствует, в частности, следующий пример.

Пусть M состоит из четырех точек: 1, 2, 3, 4, а Y образовано всеми последовательностями, содержащими символы 1, 2, всеми последовательностями, содержащими символы 3, 4, и последовательностями $\{x_i\}$, в которых $x_i = 1$ при $i \leq n$, $x_i = 3$ при $i > n$ или $x_i = 3$ при $i \leq n$, $x_i = 1$ при $i > n$, $-\infty < n < \infty$.

Нетрудно проверить, что здесь $\lambda = 2$, $a_n = 3n$, $r_n < 2^{-n}$ и существуют две эргодические меры с энтропией $\log 2$.

В заключение отметим, что можно указать немарковское множество, аппроксимируемое марковскими с любой наперед заданной скоростью. Именно, справедливо следующее

Утверждение. Для любого интервала $\Delta \subset (0, \infty)$, любого $\varepsilon > 0$ и любой последовательности положительных чисел $\{\varepsilon_n\}$ найдется немарковское множество Y такое, что $h(Y) \in \Delta$, $a_n(Y) < (2 + \varepsilon)n$ при всех достаточно больших n и $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \varepsilon_n^{-1} \leq 1$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
21 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ W. Parry, Trans. Am. Math. Soc., **112**, № 1, 55 (1964). ² R. L. Adler, A. G. Konheim, M. H. McAndrew, Trans. Am. Math. Soc., **114**, № 2, 309 (1965). ³ Е. И. Динабург, ДАН, **190**, № 1, 19 (1970). ⁴ R. L. Adler, B. Weiss, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **57**, № 6, 1573 (1967). ⁵ W. Parry, Trans. Am. Math. Soc., **122**, № 2, 368 (1966). ⁶ М. С. Штильман, Матем. заметки, **9**, № 3, 291 (1971). ⁷ И. П. Корнфельд, ДАН, **202**, № 2 (1972). ⁸ Д. Рюэль, Статистическая механика, М., 1971.

