Доклады Академии наук СССР
1972. Том 202, № 6

УДК 517+519.2

МАТЕМАТИКА

Ю. А. РОЗАНОВ

РЕГУЛЯРНОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ И ФАКТОРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 VII 1971)

Мы рассматриваем общий стационарный процесс как пару $\{A, V_t\}$, где A — сепарабельное подпространство некоторого гильбертова пространства с группой унитарных операторов V_t, $-\infty < t < \infty$, ограничиваясь лишь случаем дискретного «времени» $t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, хотя используемые методы дают аналогичный результат и в случае непрерывного t. Для наших целей, не сужая общности, можно считать, что существует так называемая спектральная плотность f_λ.

Пусть $f(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$,— произвольная положительная операторная функция в некотором сепарабельном гильбертовом пространстве A такая, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (f_\lambda a, a)\, d\lambda = \|a\|^2$, $a \in A$ (здесь и в дальнейшем (a_1, a_2) означает скалярное произведение элементов $a_1, a_2 \in A$). Рассмотрим гильбертово пространство $L^2(A)$ всех измеримых функций $a(\lambda)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$, принимающих значения A, $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \|a(\lambda)\|^2 d\lambda < \infty$, со скалярным произведением $\int\limits_{-\pi}^{\pi} (a_1(\lambda), a_2(\lambda))\, d\lambda$ и подпространство $f_\lambda^{1/2} A$ в $L^2(A)$, образованное всеми функциями $a(\lambda) = f_\lambda^{1/2} a$, $a \in A$. Пара $\{f_\lambda^{1/2} A, e^{i\lambda t}\}$, где $e^{i\lambda t}$ означает унитарный оператор умножения на указанную функцию, образует стационарный процесс, и з о м е т р и ч н ы й стационарному процессу $\{A, V_t\}$ со спектральной плотностью f_λ:

$$(V_t a_1, a_2) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}\, (f_\lambda^{1/2} a_1, f_\lambda^{1/2} a_2)\, d\lambda.$$

Пусть $H_t = \bigvee\limits_{s<t} e^{i\lambda s}[f^{1/2} A]$ означает замкнутую линейную оболочку всех элементов из указанных множеств $e^{i\lambda s}[f^{1/2} A]$, $s < t$. Стационарный процесс со спектральной плотностью f_λ называется р е г у л я р н ы м, если

$$\bigcap_t H_t = 0. \tag{1}$$

Регулярность эквивалентна факторизации

$$f_\lambda = \varphi_\lambda^* \varphi_\lambda, \tag{2}$$

где φ_λ — аналитическая операторная функция из A в некоторое гильбертово пространство B: при любых $a \in A$, $b \in B$ скалярная функция $(\varphi_\lambda a, b)$, $-\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$, принадлежит так называемому классу H^2.

Как известно, вопрос о регулярности о д н о м е р н о г о* стационарного процесса был поставлен и решен Колмогоровым [1]. Интенсивное исследование регулярности было предпринято в 1957—1961 гг. (историю во-

* Размерностью стационарного процесса $\{A, V_t\}$ называется $\dim A$ — размерность соответствующего «параметрического» пространства A.

проса можно найти, например, в [2]). Параллельно этому в гармоническом анализе операторно-значных функций изучался вопрос о факторизации (по этому поводу см., например, [3]). Можно сказать, что эти исследования дали полное решение в конечномерном случае. Однако для бесконечномерного случая вопрос оставался открытым. Мы даем ниже следующее общее решение, которое содержит все прежние результаты.

Рассмотрим аналогичное $L^2(A)$ нормированное пространство $L^1(A)$ всех измеримых функций $a(\lambda)$, $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|a(\lambda)\|d\lambda<\infty$. Пусть $B\subset L^1(A)$ — подпространство аналитических функций $b(\lambda)$: при любом $a\in A$ скалярная функция $(b(\lambda), a)$ входит в известный класс H^1, т. е.

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}(b(\lambda), a)\,d\lambda, \quad t<0, \tag{3}$$

таких, что

$$b(\lambda)\in f_\lambda^{1/2}A \quad \text{при почти всех } \lambda, \tag{4}$$

и

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\|f_\lambda^{-1/2}b(\lambda)\|^2\,d\lambda<\infty \tag{5}$$

($f_\lambda^{-1/2}$ мы задаем как обратный оператор из подпространства $f_\lambda^{1/2}A$ в замыкание $\overline{f_\lambda^{1/2}A}$, что определяет $f_\lambda^{-1/2}$ однозначно). Пусть $S=\{b_k(\lambda),\ k=1,2,\ldots\}$ есть некоторая полная система в B и $B_S(\lambda)$ — линейная оболочка всех значений $b_k(\lambda)\in A$, $k=1,2,\ldots$, в точке λ. Очевидно, замыкание $\overline{B_S(\lambda)}$ не зависит от выбора системы S, точнее, $\overline{B_{S_1}(\lambda)}=\overline{B_{S_2}(\lambda)}$ при почти всех λ для различных систем S_1, S_2. Определим почти всюду пространство-функцию $B(\lambda)$, $-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$, как $\overline{B(\lambda)}=\overline{B_S(\lambda)}$.

Теорема. *Регулярность (факторизация) имеют место тогда и только тогда, когда*

$$B(\lambda)=\overline{f_\lambda A} \quad \textit{при почти всех } \lambda. \tag{6}$$

Прежде чем перейти к доказательству, выведем из условия (6) наиболее важный из известных результатов. Условие (6) выполнено, если

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log\|f_\lambda^{-1}\|^{-1}\,d\lambda>-\infty. \tag{7}$$

В самом деле, условие (7) заключает в себе, что $\|f_\lambda^{-1}\|<\infty$ и $f_\lambda A=A$ почти всюду; кроме того, функция $b(\lambda)=\theta(\lambda)a$, $a\in A$, где скалярная функция $\theta(\lambda)$ из класса H^2 факторизует $\|f_\lambda^{-1}\|^{-1}$, входит в пространство $\overline{B(\lambda)}$. (Напомним, что в конечномерном случае условие (7) равносильно тому, что $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log\,[\det f(\lambda)]d\lambda>-\infty$, где $[\det f(\lambda)]$ совпадает с определителем Грамма базисных элементов $f_\lambda^{1/2}a_k$, $k=1,\ldots,n$.) Стоит отметить, что в конечномерном случае для матрично-значной невырожденной спектральной плотности $f(\lambda)$ условие нашей теоремы означает, что

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\mathrm{Sp}\,b(\lambda)^*f^{-1}(\lambda)\,b(\lambda)\,d\lambda<\infty$$

для некоторой невырожденной аналитической матрицы $b(\lambda)$ с компонентами из класса H^1, откуда сразу следует

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log\det\,[b^*(\lambda)f^{-1}(\lambda)\,b(\lambda)]\,d\lambda=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log\det|\,b(\lambda)\,|^2\,d\lambda-\int\limits_{-\pi}^{\pi}\log\det f(\lambda)\,d\lambda<\infty,$$

что эквивалентно упомянутому выше условию

$$\int_{-\pi}^{\pi} \log \det f(\lambda)\, d\lambda > -\infty.$$

Доказательство теоремы. Пусть Δ — некоторое подпространство в $L^2(A)$ и $\delta_1(\lambda)$, $\delta_2(\lambda)$, ... — некоторая полная система функций в Δ. Ясно, что если функция $a(\lambda)$ входит в замкнутую линейную оболочку $\bigvee\limits_{-\infty<t<\infty} e^{i\lambda t}\Delta$, то при почти всех λ она совпадет с пределом некоторых линейных комбинаций $\sum\limits_{n} [\sum\limits_{k} c_{kn} e^{i\lambda k}] \delta_n(\lambda) \in \Delta(\lambda)$, так что

$$a(\lambda) \in \overline{\Delta(\lambda)} \quad \text{п.в.} \tag{8}$$

Лемма. *Подпространство* $\bigvee\limits_{-\infty<t<\infty} e^{i\lambda t}\Delta$ *состоит из всех функций* $a(\lambda) \in L^2(A)$, *удовлетворяющих условию* (8).

В самом деле, поскольку для любых функций $a'(\lambda)$, $a''(\lambda) \in L^2(A)$ скалярное произведение $(a'(\lambda), a''(\lambda))$ измеримо по λ, проекция $a_n(\lambda)$ элементов $a(\lambda) \in A$ как функция от λ будет измеримой. Эта функция $a_n(\lambda)$ входит в $L^2(A)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|a(\lambda) - a_n(\lambda)\| = 0$ при почти всех λ, поскольку $\|a(\lambda) - a_n(\lambda)\|^2 \leqslant \|a(\lambda)\|^2$, где $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \|a(\lambda)\|^2 d\lambda < \infty$, то $\lim \int\limits_{-\pi}^{\pi} \|a(\lambda) - a_n(\lambda)\|^2 d\lambda = 0$.

В частности, *пространство* $H = \bigvee\limits_{-\infty<t<\infty} e^{i\lambda t}[f_\lambda^{1/2} A]$ *состоит из всех тех функций* $a(\lambda) \in L^2(A)$, *которые удовлетворяют условию* $a(\lambda) \in \overline{f_\lambda^{1/2} A}$ *п.в.*

Используя метод работы ([4]), обратимся к подпространству $\Delta \subseteq H$, которое является ортогональным дополнением $H_0 = \bigvee\limits_{S<0} e^{i\lambda t}[f_\lambda^{1/2} A]$: $\Delta = H \ominus H_0$. Очевидно, регулярность означает, что

$$\bigvee_{-\infty<t<\infty} e^{i\lambda t}\Delta = H. \tag{9}$$

Всякая функция $\delta(\lambda) \in \Delta$ такова, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}(f_\lambda^{1/2} a, \delta(\lambda))\, d\lambda = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda t}(a, f_\lambda^{1/2}\delta(\lambda))\, d\lambda = 0 \qquad \text{при всех } t < 0, \tag{10}$$

так что функция $b(\lambda) = f_\lambda^{1/2}\delta(\lambda)$ удовлетворяет условиям (3)—(5). С другой стороны, для любой функции $b(\lambda)$, удовлетворяющей этим условиям, функция $\delta(\lambda) = f_\lambda^{-1/2} b(\lambda)$, согласно доказанной лемме, принадлежит H и удовлетворяет соотношению (10), т. е. $\delta(\lambda) \in \Delta$. Равенство (9) имеет место тогда и только тогда, когда $\overline{\Delta(\lambda)} = \overline{f_\lambda^{1/2} A}$ при почти всех λ, что эквивалентно условию (6).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
10 VII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Колмогоров, C. R., **208**, 2043 (1939). [2] Ю. А. Розанов, Стационарные случайные процессы, М., 1963. [3] С. Б. Надь, И. Фолш, Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве, М., 1970. [4] Ю. А. Розанов, ДАН, **116**, 923 (1957).