Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

МАТЕМАТИКА

М. БОГНАР (ВЕНГРИЯ)

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ТЕОРИИ ЗАЦЕПЛЕНИЯ

(Представлено академиком П. С. Александровым 25 X 1971)

При аксиоматизации теории гомологий, данной Эйленбергом и Стинродом, возникает новая проблема: кроме коэффициентов зацепления конкретных циклов или классов гомологий исследовать и некую единую теорию зацеплений теорий гомологий, построенную также аксиоматически. Именно это и является целью настоящей статьи.

Заметим, что под теорией гомологий мы понимаем всегда частично точную теорию гомологий, определенную на категории компактных пар (терминология и обозначения заимствованы из [2]). Через $\tilde{H}_t(X)$, где H — теория гомологий, а X — компактное пространство, обозначим t-мерную группу гомологий $H_t(X)$ при $t > 0$ и приведенную нульмерную группу гомологий при $t = 0$; через $\tilde{H}_t(f)$ или даже $\tilde{H}(f)$, где f: $X \to Y$ — непрерывное отображение компактного пространства X в компактное пространство Y, обозначим отображение группы $\tilde{H}_t(X)$ в группу $\tilde{H}_t(Y)$, определенное индуцированным отображением f_*: $H_t(X) \to H_t(Y)$.

Назовем отображение $\mathfrak{v}$: $A \times B \to C$, где A, B, C — абелевы группы, бигомоморфизмом, если выполнено условие

$$\mathfrak{v}(a + a', b + b') = \mathfrak{v}(a, b) + \mathfrak{v}(a, b') + \mathfrak{v}(a', b') + \mathfrak{v}(a', b').$$

Назовем бигомоморфизм $\mathfrak{v}$: $A \times B \to C$ тривиальным, если

$$\mathfrak{v}(A \times B) = 0.$$

Пусть теперь даны две теории гомологий H и H', абелевы группа C, n-мерное эвклидово пространство R^n и целые числа t, t', подчиняющиеся условию $t + t' = n - 1$ (пары H, H' и t, t' упорядочены).

Основное определение. Отображение $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{H, H', C, t, t'}$, ставящее в соответствие каждой упорядоченной паре N, N' непересекающихся компактных подмножеств пространства R^n бигомоморфизм $\mathfrak{v}_{N, N'}$: $\tilde{H}_t(N) \times \tilde{H}_t(N') \to C$ назовем (малой) теорией зацепления компактов для теорий гомологий H и H' (при заданных группе C и числах t и t'), если для любых компактов M, M', N и N', подчиняющихся вложениям $M \subset N$, $M' \subset N$ (разумеется, $N \cap N' = \phi$), выполняется условие

$$\mathfrak{v}_{M, M'}(u, u') = \mathfrak{v}_{N, N'}(\tilde{H}_t(i)(u), \tilde{H}'_{t'}(i')(u')) \qquad (*)$$

при любых $u \in \tilde{H}_t(M)$ и $u' \in \tilde{H}_{t'}'(M')$, где i: $M \subset N$ и i': $M' \subset N'$ — отображения вложений.

Для определенной таким образом теории зацеплений справедлива следующая теорема существования и единственности. Предварительно уточним понятие зацепления сфер.

Определение. Сферы S и S' размерностей t и соответственно t' пространства R^n назовем зацепленными (друг с другом), если выполняются следующие условия:

а) $t + t' = n - 1$;

б) центр сферы S принадлежит сфере S', а центр сферы S' принадлежит сфере S;

в) несущие плоскости R и R' сфер S и соответственно S' (см. ([1]), стр. 652) пересекаются по прямой;

г) несущие плоскости R и R' перпендикулярны в том естественном смысле, что любые векторы α из R и α' из R', перпендикулярные к прямой $R \cap R'$, перпендикулярны друг другу.

Теорема. *Каковы бы ни были теории гомологий H, H', абелева группа C, неотрицательные целые числа t, t', для любого бигомоморфизма* $\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{v}_0$: $\tilde{H}_t(S) \times \tilde{H}_{t'}'(S') \to C$, *где S и S' — зацепленные в R^n, $n = t + t' + 1$, сферы размерностей t и соответственно t', существует и притом только одна теория зацеплений $\mathfrak{V}_{H, H', C, t, t'}$ для компактов пространства R^n, принимающаяся на паре S, S' значение $\mathfrak{v}_0$.*

Приведем некоторые следствия. Как и ранее, мы фиксируем теории гомологий H и H', группу C и числа t и t', а тем самым и R^n. Через N, N' будем обозначать пару непересекающихся компактов из R^n, а через $\mathfrak{v}_{N, N'}$ — значение теории $\mathfrak{V}_{H, H', C, t, t'}$ на паре N, N'.

Следствие 1. *Для любой теории зацеплений $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{H, H', C, t, t'}$ и для любой подгруппы B группы C, как только для некоторой пары S, S' зацепленных сфер (размерностей t и t') $\mathfrak{v}_{S, S'}(\tilde{H}_t(S) \times \tilde{H}_{t'}'(S')) \subseteq B$, то и $\mathfrak{v}_{N, N'}(\tilde{H}_t(N) \times \tilde{H}_{t'}'(N')) \subseteq B$ для любой пары N, N'.*

В самом деле, бигомоморфизм $\mathfrak{v}_{S, S'}$, определенный теорией зацеплений $\mathfrak{V}$, принимает значения в B. В силу первой части теоремы для пятерки H, H', B, t, t', где H, H', t и t' — те же, что и ранее, существует теория зацеплений $\mathfrak{V}^* = \mathfrak{V}_{H, H', C, t, t'}$, принимающая на паре S, S' значение $\mathfrak{v}_{S, S'}$. Можно считать, что теория $\mathfrak{V}^*$ определена для пятерки H, H', C, t, t'. В силу второй части теоремы, теории $\mathfrak{V}$ и $\mathfrak{V}^*$ совпадают, т. е. $\mathfrak{v}_{N, N'} = \mathfrak{v}_{N,}{}^*{}_{N'}$ для всех пар N, N'. Так как областью значений каждого бигомоморфизма $\mathfrak{v}_{N,}{}^*{}_{N'}$ является подгруппа B, то этим все доказано.

Назовем теорию зацепления $\mathfrak{V}$ вырожденной, если всякое ее значение $\mathfrak{v}_{N, N'}$ тривиально, т. е. является нулевым бигомоморфизмом.

Следствие 2. *Теория зацеплений вырождена тогда и только тогда, когда хотя бы одно ее значение на паре зацепленных сфер должных размерностей тривиально.*

Обозначим через φ_N, где $\varphi = \varphi$: $X \to Y$, а $N \subseteq X$, отображение φ_N: $N \to \varphi(N)$, совпадающее с φ на N.

Следствие 3. *В предположении, что группы коэффициентов теорий гомологий H и H' циклические, для каждой теории зацеплений $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_{H, H', C, t, t'}$ и каждого гомеоморфизма φ: $R^n \to R^n$ существует такое целое число k, что для любой пары N, N' выполняется условие*

$$\mathfrak{v}_{\varphi(N),\varphi(N')}(\tilde{H}_t(\varphi_N)(u), \tilde{H}'_{t'}(\varphi_{N'})(u')) = k\mathfrak{v}_{N, N'}(u, u') \qquad (**)$$

для всех u из $\tilde{H}_t(N)$ и всех u' из $\tilde{H}_{t'}'(N')$.

Доказательство. Пусть S, S' — пара зацепленных в R^n сфер. В силу условия группы $\tilde{H}_t(S)$ и $\tilde{H}_{t'}'(S')$ также циклические. Пусть u_0 — образующий элемент в первой, а u_0' — во второй. Пусть B — подгруппа группы C, порожденная элементом $\mathfrak{v}_{S, S'}(u_0, u_0')$. Тогда все значения бигомоморфизма $\mathfrak{v}_{S, S'}$ принадлежат к B и в силу следствия 1 значение $\mathfrak{v}_{\varphi(S), \varphi(S')}(\tilde{H}_t(\varphi_S)(u_0), \tilde{H}_{t'}'(\varphi_{S'})(u_0'))$ бигомоморфизма $\mathfrak{v}_{\varphi(S), \varphi(S')}$ также принадлежит к B, а потому имеет вид $k\mathfrak{v}_{S, S'}(u_0, u_0')$, где k — целое число. Легко видеть, что для каждой пары N, N' формулы

$$\mathfrak{v}'_{N, N'}(u, u') = \mathfrak{v}_{\varphi(N), \varphi(N')}(\tilde{H}_t(\varphi_N)(u), \tilde{H}'_{t'}(\varphi_{N'})(u')),$$

$$\mathfrak{v}''_{N, N'}(u, u') = k\mathfrak{v}_{N, N'}(u, u'),$$

где $u \in \tilde{H}_t(N)$, $u' \in \tilde{H}'_{t'}(N')$, определяют бигомоморфизмы со значениями в C. Столь же ясно, что отображения $\mathfrak{V}'(N, N') = \mathfrak{v}'_{N, N'}$ и $\mathfrak{V}''(N, N') = \mathfrak{v}''_{N, N'}$ являются теориями зацеплений. Покажем, что $\mathfrak{v}'_{S, S'} = \mathfrak{v}''_{S, S'}$. По построению, $\mathfrak{v}'_{S,S'}(u_0, u'_0) = \mathfrak{v}''_{S,S'}(u_0, u'_0)$. Если $u \in \tilde{H}_t(S)$, а $u' \in \tilde{H}'_{t'}(S')$, то $u = mu_0$ и $u' = m'u'_0$, где m и m' целые. Тогда $\mathfrak{v}'_{S,S'}(u, u') = mm'\mathfrak{v}'_{S,S'}(u_0, u'_0) = mm'\mathfrak{v}''_{S,S'}(u_0, u'_0) = \mathfrak{v}''_{S,S'}(u, u')$. Значит, $\mathfrak{v}'_{S,S'} = \mathfrak{v}''_{S,S'}$, и согласно теореме $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}''$, что и требовалось показать.

Определение. Целое число k, удовлетворяющее условию (**), для всех пар N, N', где $\mathfrak{B}$ — теория зацеплений в R^n, а $\varphi\colon R^n \to R^n$ — непрерывное отображение, назовем множителем отображения φ по модулю $\mathfrak{B}$.

Следствие 4. *Если в условии следствия 3 дополнительно потребовать, чтобы теория зацеплений была невырожденной, а группа C не имела кручения, то множитель k гомеоморфизма φ по модулю $\mathfrak{B}$ единствен и равен или $+1$, или -1.*

Действительно, повторим доказательство следствия 3 до получения теории зацеплений $\mathfrak{B}'$ со значениями $\mathfrak{B}'_{N,N'}$ и рассмотрим множитель k' гомеоморфизма φ^{-1} по модулю $\mathfrak{B}'$. Тогда

$$1)\ k'k\mathfrak{v}_{S,S'}(u_0,u'_0) = k'\mathfrak{v}'_{S,S'}(u_0, u'_0) = \mathfrak{v}'_{\varphi^{-1}(S),\,\varphi^{-1}(S')}(\tilde{H}_t(\varphi_S^{-1})(u_0),\ \tilde{H}'_{t'}(\varphi_{S'}^{-1})(u'_0)) =$$
$$= \mathfrak{v}_{\varphi(\varphi'(S)),\,\varphi(\varphi^{-1}(S''))}(\tilde{H}_t(\varphi_{\varphi^{-1}(S)}(\tilde{H}_t(\varphi_S^{-1})(u_0)),\tilde{H}'_{t'}(\varphi_{\varphi^{-1}(S')})(\tilde{H}_{t'}^{-1})(\varphi_{S'}^{-1}(u'_0))) = \mathfrak{v}_{S,S'}(u_0,u'_0).$$

Так как теория зацеплений $\mathfrak{B}$ невырождена, то согласно следствию 2, бигомоморфизм $\mathfrak{v}_{S,S'}$ нетривиален и, стало быть, $\mathfrak{v}_{S,S'}(u_0, u_0') \neq 0$. Отсюда в силу того, что в C нет кручения, получаем

$$2)\ [k_1\mathfrak{v}_{S,S'}(u'_{0'}, u'_0) = k_2\mathfrak{v}_{S,S'}(u_0, u'_0)] \Leftrightarrow k_1 = k_2,$$

чем единственность множителя k доказана. Кроме того, из 1) и 2) видим, что $k'k = 1$ и, следовательно, $|k| = 1$.

В заключение заметим, что, как показал В. Г. Болтянский, введением подходящей аксиомы можно установить связь между теориями зацеплений различных размерностей t и, более того, между теориями зацеплений эвклидовых пространств различных размерностей n.

Математический институт
Академии наук Венгрии
Будапешт

Поступило
14 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. С. Александров, Комбинаторная топология, 1947. [2] Н. Стинрод, С. Эйленберг, Основания алгебраической топологии, 1958.