

В. Л. КЛЮШИН

О ПРОСТРАНСТВАХ С ПРАВИЛЬНО ДРОБЯЩИМИСЯ ПОКРЫТИЯМИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 XII 1971)

Будем говорить, что покрытие β пространства X правильно вписано в покрытие α этого пространства, если для всякой пары V_1, V_2 пересекающихся элементов покрытия β существует элемент покрытия α , содержащий $V_1 \cup V_2$. Правильно вписанные покрытия впервые рассматривались в метризацииной теореме П. С. Александрова и П. С. Урысона ⁽¹⁾.

Всюду в настоящей работе покрытия предполагаются состоящими из открытых множеств, а пространства — T_2 -пространствами. Назовем покрытие ω правильно дробящимся, если существует такая последовательность покрытий $\{\gamma_i\}_{i=0}^{\infty}$, что $\gamma_0 = \omega$ и для каждого i покрытие γ_{i+1} правильно вписано в γ_i .

Заметим, что даже среди p -пространств и M -пространств существуют непаракомпактные пространства, в которых все покрытия являются правильно дробящимися. Таковы, в частности, пространство $TW(\omega_1)$ порядковых чисел $< \omega_1$, пространство $TW(\omega_1) \times A_2$, где A_2 — бикомпакт «две окружности» из ⁽²⁾. Пространства, в которых все покрытия являются правильно дробящимися, рассматривались автором в работе ⁽³⁾ и были названы там псевдо-паракомпактными (позднее К. Морита в работе ⁽⁴⁾ употребил термин «псевдо-паракомпактное пространство» в другом смысле). В упомянутой работе автора ⁽³⁾ доказано, что если в данное покрытие ω можно правильно вписать точечно счетное покрытие, то существует σ -дискретное покрытие, вписанное в ω . В доказательстве этой теоремы существенно использовалось следующее утверждение.

Лемма. Пусть покрытие γ пространства X правильно вписано в покрытие ω этого пространства.

Тогда покрытие $\gamma^* = \{\gamma(x); x \in X\}$ звездно вписано в покрытие $\omega^* = \{\omega(x); x \in X\}$. (Через $\gamma(x)$ мы обозначаем звезду точки x относительно γ , т. е. множество $\bigcup_{x \in I \in \gamma} I$).

В связи с этой леммой рассмотрим

Свойство (*). Для покрытия ω существует такое покрытие γ , что покрытие $\gamma^* = \{\gamma(x); x \in X\}$ звездно вписано в покрытие $\omega^* = \{\omega(x); x \in X\}$.

Будем говорить, что пространство обладает свойством (*), если все его покрытия обладают свойством (*). Определения других понятий, встречающихся ниже, можно найти, например, в работе ⁽⁵⁾.

Теорема 1. Если X псевдо-паракомпактно и существует бикомпактное отображение $f: X \rightarrow Y$ в пространство с измельчающейся последовательностью покрытий, то X паракомпактно.

Теорема 2. Если для пространства X существует совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ в пространство с точечно счетной базой и если покрытие ω пространства X обладает свойством (*), то в ω можно вписать σ -дискретное покрытие.

В частности, если в условиях теоремы 2 пространство X псевдо-паракомпактно, то оно паракомпактно. Из теоремы 2 и теоремы В. В. Филиппова о метризуемости паракомпактного p -пространства с точечно счетной базой (см. ⁽⁶⁾, теорема 3) вытекает

Следствие 1. Псевдо-паракомпактное p -пространство с точечно счетной базой метризуемо.

Из этого утверждения, опираясь на другой результат В. В. Филиппова (см. (7), следствие 3), получаем

Следствие 2. *Псевдо-паракомпактное p -пространство, являющееся факторным s -образом метрического пространства, метризуемо.*

Следствия 1 и 2 остаются верными, если ослабить требование псевдо-паракомпактности, предположив пространство регулярным и обладающим свойством (*).

Теорема 3. *Если все покрытия σ -паракомпактного пространства обладают свойством (*), то X паракомпактно.*

Следствие 3. *Если пространство X одновременно σ -паракомпактно и псевдо-паракомпактно, то оно паракомпактно.*

Теорема 4. *Если для всякого метрического пространства R пространство $Y \times R$ псевдо-паракомпактно, и если существует совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$, то пространство X псевдо-паракомпактно.*

Доказательства следующих двух рассуждений подобны доказательствам соответствующих свойств паракомпактных пространств.

Предложение 1. *Если X совершенно нормально и обладает свойством (*), R — метрическое пространство, а $Y = X \times R$, то Y совершенно нормально и обладает свойством (*).*

Предложение 2. *Свойство (*) сохраняется в обе стороны при совершенных отображениях.*

Пользуясь предложением 2 и теоремой 1, получаем следующий результат.

Теорема 5. *Пусть пространство Y псевдо-паракомпактно, а пространство Z обладает измельчающейся последовательностью покрытий.*

Тогда, если для пространства X существуют совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ и бикompактное отображение $g: X \rightarrow Z$, то X паракомпактно.

Систему покрытий $\{\gamma_\alpha\}_{\alpha \in A}$ пространства X назовем τ -измельчающейся, если $\text{card } A \leq \tau$ и если для любой точки $x \in X$ и всякой ее окрестности O_x существует $\alpha \in A$, для которого $x \in \gamma_\alpha(x) \subseteq O_x$.

Теорема 6. *Пусть пространство X псевдо-паракомпактно и имеет базу точечной кратности $\leq \tau$. Пусть, кроме того, существует совершенное отображение $f: X \rightarrow Y$ в пространство с τ -измельчающейся системой покрытий.*

Тогда в X существует τ -локально-конечная база.

Теорема 7. *Совершенный образ псевдо-паракомпактного p -пространства есть p -пространство, обладающее свойством (*).*

В заключение сформулируем несколько задач.

1) Всякое ли коллективно нормальное пространство, обладающее свойством (*), псевдо-паракомпактно?

2) Сохраняется ли псевдо-паракомпактность при совершенных отображениях?

3) Пусть X обладает свойством (*), а Y — локально бикompактный паракомпакт. Верна ли формула

$$\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y?$$

Заметим, что если X упорядоченное пространство, то это неравенство справедливо.

4) Совпадают ли понятия p -пространства и M -пространства, если выполняется свойство (*)?

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Alexandroff, P. Urysohn, С. R., 177, 1274 (1923). ² П. С. Александров, П. С. Урысон, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, 31 (1950).
³ В. Л. Ключин, Вестн. Московск. ун-в., сер. матем., мех., № 4, 54 (1966).
⁴ К. Morita, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daidaku, A10, № 263—274, 271 (1970). ⁵ А. В. Архангельский, УМН, 21, в. 4 (130), 134 (1966). ⁶ В. В. Филиппов, ДАН, 178, № 3, 555 (1968). ⁷ В. В. Филиппов, Матем. сборн., 80 (122), № 4, 521 (1969).