Доклады Академии наук СССР
1972. Том 203, № 5

УДК 517.944

МАТЕМАТИКА

И. М. КАРАСЕВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В ПРОСТРАНСТВАХ $C^{(\alpha)}(G)$ И $L_q^{(\alpha)}(G)$

(Представлено академиком И. Н. Векуа 12 X 1971)

1. Пусть R^n — эвклидово n-мерное пространство, G — выпуклая область R^n, $x \in G$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$.

Здесь и в дальнейшем дробную производную порядка α, $0 < \alpha < 1$, функции $f(x) \in G(R^n)$ будем понимать в смысле И. А. Киприянова ([1, 2]) и обозначать $f^{(\alpha)}(P, Q)$, где $P \in G(R^n)$ — фиксированная точка, Q — произвольная точка этой области.

$C^{(\alpha)}(G)$ — множество функции $f(x)$, непрерывных в $\bar{G}$ и имеющих непрерывные производные $f^{(\alpha)}(P, Q)$, $0 < \alpha < 1$, в $\bar{G} \times \bar{G}$.

Напомним, что норма в $C^{(\alpha)}(G)$ вводится по формуле

$$\|f\|_{C^{(\alpha)}(G)} = \max_{Q \in G} |f(Q)| + \max_{(P,\, Q) \in \bar{G} \times \bar{G}} |f^{(\alpha)}(P, Q)|. \tag{1,1}$$

$L_q^{(\alpha)}(G)$ означает множество функций $f(x) \in L_q(G)$, $q > 1$, имеющих в G производные $f^{(\alpha)}(P, Q) \in L_q$ с нормой

$$\|f\|_{L_q^{(\alpha)}(G)} = \left(\int_G |f(Q)|^q \, dQ\right)^{1/q} + \left(\int_G \int_G |f^{(\alpha)}(P, Q)|^q \, dP \, dQ\right)^{1/q}. \tag{1,2}$$

В таком случае $C^{(\alpha)}(G)$ и $L_q^{(\alpha)}(G)$ будут полными линейными нормированными пространствами ([2]).

Наряду с $C^{(\alpha)}(G)$ и $L_q^{(\alpha)}(G)$ вводим обобщенное пространство С. Л. Соболева $W_p^r(G)$, где $r = [r] + \alpha$, $0 < \alpha < 1$ ([3, 4]).

2. Рассмотрим уравнение вида

$$Lu \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij} u_{x_j} + a_i(x) u) + b_i(x) u_{x_i} + a(x) u = \psi(x), \tag{2,1}$$

где $\psi(x) = \partial f_i / \partial x_i + f$. Подразумевается, что суммирование по индексам i и j совершается в пределах от 1 до n.

Будем предполагать, что уравнение (2,1) строго эллиптического типа, т. е,

$$\nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2 \leqslant a_{ij} \xi_i \xi_j \leqslant \mu \sum_{i=1}^n \xi_i^2, \quad \nu, \mu - \text{const}. \tag{2,2}$$

Введем обозначения: $a_0 = \frac{1}{\text{mes}} \int_G a(x) \, dx$, $M = \max \left\{ \left\| \sum_{i=1}^n (b_i - a_i)^2 \right\|_{L_{1/2 q}(G)}; \right.$ $\|a^+(x)\|_{L_{1/2 q}(G)}$, где $a^+(x) = \max\{a(x) - a_0; 0\}$, $a^-(x) = -a_0 + \max\{-a(x) + a_0; 0\}$, $C(q)$ — некоторая постоянная, зависящая от q и n, q — некоторое число, $q > 0$;

$$C_1(q) = \left[\frac{M(2\nu + 1) n}{\nu^2 q} 2C^2(q)\right]^{q/(q-n)} \frac{q - n}{2}. \tag{2,3}$$

Для уравнения (2,1) в $G(R^n)$, ограниченной достаточно гладкой поверхностью ∂G, рассмотрим задачу Дирихле

$$Lu = \psi(x), \quad u|_{\partial G} = 0, \tag{2,4}$$

при условии $\psi(x) \in L_2(R)$. Предполагается, что без ограничения общности граничное условие сведено к однородному.

Принято говорить, что область G обладает свойством $\mathfrak{R}$, если задача Дирихле $\Delta u = \psi(x)$, $u|_{\partial G} = 0$ разрешима в $W_{2,0}^{2}$ для какого-либо плотного в $L_2(G)$ множества $\mathfrak{M}$ функций $\psi(x)$.

Здесь и в дальнейшем используется символика и обозначения, принятые в [5].

Теорема 1. *Пусть область $G(R^n)$ обладает свойством $\mathfrak{R}$, ограничена достаточно гладкой поверхностью ∂G с кривизной, ограниченной снизу числом K; и если выполнено неравенство*

$$C_1(q) + \frac{q}{\nu} a_0 \leqslant 0, \quad q < n, \tag{2,5}$$

то задача (2,4) *однозначно разрешима в пространстве $C_0^{(\alpha)}$ при любой $\psi \in L_2(G)$.*

Пусть $u(x) \in W_{2,0}^{2}$ — решение задачи (2,4) в области $G(R^n)$. Для области, ограниченной достаточной гладкой поверхностью ∂G с кривизной, ограниченной снизу числом K, имеет место неравенство [5]

$$\|u\|^2_{W_2^2(G)} \leqslant C\,[\|Lu\|^2_{L_2(G)} + \|u\|^2_{L_2(G)} \tag{2,6}$$

(C — некоторая константа).

По условию теоремы область $G(R^n)$ обладает свойством $\mathfrak{R}$, справедливы неравенства (2,5) и (2,6), тогда решение $u(x)$ задачи (2,4) в пространстве $W_{2,0}^{2}(G)$ будет единственным при любой $\psi(x) \in L_2(G)$.

В силу результатов [1,2] $C_0^{(\alpha)} \to W_{2,0}^{2}$, $0 < \alpha < 1$.

Таким образом, верна теорема Слободецкого [4], в силу которой решение задачи (2,4) в $C^{(\alpha)}(G)$ будет единственным.

3. В качестве конкретного примера рассмотрим первую краевую задачу для эллиптического уравнения

$$\Delta u = f(x), \tag{3,1}$$

с граничным условием

$$u|_{\partial G} = \varphi(x), \tag{3,2}$$

где $G \in R^3$, ∂G — достаточно гладкая граница области G.

Теорема 2. *Чтобы задача* (3,1), (3,2) *была однозначно разрешима в $C^{(\alpha)}(G)$, $0 < \alpha < {}^1/_2$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x) \in L_2(G)$ и на гиперплоскости двух измерений $\psi \in L_3^{\beta}(\partial G)$, $0 < \beta < {}^1/_6$. При выполнении этих условий имеет место двухсторонняя оценка*

$$\begin{aligned}\gamma_1 \Big\{\|f\|_{L_2(G)} + \Big[\|\varphi\|_{L_2(\partial G)} + \sum_{|K|=[^3/_2]} \|D\varphi\|_{L_2(\partial G)} + \sum_{|K|=[^3/_2]} K\,[D\varphi, \partial C]\Big]^{1/2}\Big\} \leqslant \\ \leqslant \|u\|_{C^{(\alpha)}(G)} \leqslant \gamma_2 \Big\{\|f\|_{L_2(G)} + \Big[\|\varphi\|_{L_2(\partial G)} + \sum_{|K|=[^3/_2]} \|D\varphi\|_{L_2(\partial G)} + \\ + \sum_{|K|=[^3/_2]} K\,[D\varphi, \partial G]\Big]^{1/2}\Big\},\end{aligned} \tag{3,3}$$

где

$$K\,[\partial\varphi, \partial G] = \iint\limits_{\partial G \times \partial G} \frac{|D\varphi(x) - D\varphi(y)|^2}{|x-y|^3}\, dx\, dy.$$

В силу [1,2] $W_2^{2}(G) \to C^{(\alpha)}$, $0 < \alpha < {}^1/_2$, имеем $u(x) \in W_2^{2}(G)$, аналогично, в силу $W_2^{3/2}(\partial G) \to L_2^{\beta}(\partial G)$, $0 < \beta < {}^1/_6$, $\varphi(x) \in W_2^{3/2}(\partial G)$.

Кроме того, по условию $f(x) \in L_2(G)$.

Таким образом, верна теорема Л. Н. Слободецкого ([4]), в силу которой решение задачи (3,1), (3,2) в $C^{(\alpha)}(G)$ будет единственным. В силу той же теоремы и определения обобщенного пространства Соболева ([3]) W_p^r, где r — дробное, вытекает справедливость двухсторонней оценки решения $u(x)$.

Кабардино-Балкарский государственный
университет
Нальчик

Поступило
21 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] И. А. Киприянов, Изв. АН СССР, сер. матем., **24** (1960). [2] И. А. Киприянов, ДАН, **126**, № 6 (1959). [3] В. И. Буренков, Тр. симпозиума по теоремам вложения, Баку, 1966. [4] Л. Н. Слободецкий, ДАН, **118**, № 2 (1958). [5] О. А. Ладыженская, Н. Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1964.