Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 4

УДК 517.944 МАТЕМАТИКА

И. М. СИГАЛ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ ПОЛНОТА СИСТЕМ МНОГИХ ЧАСТИЦ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 29 XI 1971)

1. Рассмотрим систему n нерелятивистских квантовых частиц с парным взаимодействием. Оператор Шредингера такой системы в импульсном представлении имеет вид

$$H_n f = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2m_i} f(p) + \frac{1}{2} \sum_{i\neq j} \int v_{ij}(p_i - q_i)\,\delta(p_i + p_j - q_i - q_j) \times$$
$$\times \prod_{k\neq i,j} \delta(p_k - q_k) f(q)\, dq_1 \cdot \ldots \cdot dq_n = H_0 + V,$$

$$m_i > 0, \quad v_{ij}(-k) = \bar v_{ij}(k), \quad p_i \in \mathbf{R}^3, \quad p = (p_1 \ldots p_n).$$

В этой работе будем предполагать, что $v_{ij}(k)$ удовлетворяют следующим условиям:

$$|v_{ij}(k)| \leqslant C(1+|k|)^{-\theta_0},$$
$$|v_{ij}(k+h) - v_{ij}(k)| \leqslant C(1+|k|)^{-\theta_0}|h|^{\mu_0},\ \theta_0 > 3/2,\ \mu_0 > 1/2. \qquad (1)$$

Если выполняется (1), оператор H_n определен на $S(\mathbf{R}^{3n})$ и имеет оттуда единственное самосопряженное расширение ([5]).

Математическая задача квантовой теории рассеяния в стационарной постановке состоит в доказательстве существования, ортогональности и полноты обобщенных собственных функций оператора H_n, имеющих определенную асимптотику на бесконечности в конфигурационном пространстве системы. Эту задачу, как было установлено в ([2]) для системы двух частиц, можно свести к задаче об изучении поведения резольвенты оператора H_n, когда комплексный параметр выходит на его непрерывный спектр.

2. Введем некоторые обозначения. Пусть $a = \{C_i\}$ — разбиение нашей системы на $k(a)$ непустых подсистем $C_1, \ldots, C_{k(a)}$, H_C — оператор Шредингера подсистемы частиц C в системе ее центра масс, $H_a = \sum_{C_i \in a} \oplus H_{C_i}$ и $H = H_a$, если $k(a) = 1$; $\lambda_a^{(m)}$ и $\psi_a^{(m)}$, $m = 1 \ldots m(a)$, $m(a) = 0, 1, \ldots \ldots, k(a) < n$,— соответственно собственные числа и отвечающие им собственные функции оператора H_a. При $k(a) = n$ положим $m(a) = 1$, $\lambda_a = 0$, $\psi_a \equiv 1$. Если разбиение b получается дальнейшим расщеплением подсистем в разбиении a, будем писать $b \subset a$. Обозначим через $\Pi(a)$ комплексную плоскость с разрезом по полуоси $[E_c^a, +\infty)$, $E_c^a = \min_{b\subset a} \inf H_b$ ($E_c = E_c^a$, $k(a) = 1$), причем при $k(a) = 1$ из нее вырезаются вместе с некоторыми окрестностями собственные значения оператора H, лежащие на этой полуоси, и точки $\lambda_b^{(m)}$ если уравнение (**) имеет при $z = \lambda_b^{(m)} \pm i0$ решения в банаховом пространстве $\mathfrak{B}_{\theta,\mu}$, $\theta > 3/2$, $\mu > 0$ (определение $\mathfrak{B}_{\theta,\mu}$ см. дальше).

Опишем используемые в заметке переменные:

$$k_C = \left(p_i^0,\, i \in C,\, p_i^0 = p_i - m_i \left(\sum_{j \in C} m_j\right)^{-1} \sum_{j \in C} p_j\right),$$

$$k_a = (k_{C_i},\, C_i \in a), \qquad p_a = (p_{C_i},\, C_i \in a,\, p_{C_i} = \sum_{j \in C_i} p_j), \qquad p = (k_a,\, p_a).$$

Если $b \subset a$,

$$p_b^a = \left(p_{\bar{C}_i},\, \bar{C}_i \in b,\, \sum_{\bar{C}_i \subseteq C_k} p_{\bar{C}_i} = 0,\, C_k \in a\right), \quad k_a = (k_b,\, p_b^a).$$

Положим далее

$$T(p_a) = \sum_{C_i \in a} \left(2 \sum_{k \in C_i} m_k\right)^{-1} p_{C_i}^2.$$

Определим оценочные функции, встречающиеся в дальнейшем. Пусть S — совокупность собственных подмножеств множества M, состоящего из m индексов. Рассмотрим множество F подмножеств $I \subset S$ следующего вида: $\bigcup_{\alpha \in I} \alpha$ содержит $m-1$ элементов, и если $\alpha, \beta \in I$, то выполняется одно из следующих условий: либо $\alpha \cap \beta = \phi$, либо $\alpha \subset \beta$, либо $\alpha \supset \beta$, причем включение последних двух случаев строгое.

Лемма. *Преобразование* $q^\alpha = \sum_{i \in \alpha} p_i$, $\alpha \in I$, $q^M = \sum_{i \in M} p_i$ *неособенное.*

Положим

$$N(p_M;\, \theta) = \sum_{I \in F} \prod_{(i_1 \ldots i_s) \in I} (1 + |p_{i_1} + \ldots + p_{i_s}|)^{-\theta}, \quad p_M = (p_i,\, i \in M);$$

$$N_a(k_a;\, \theta) = \prod_{C_i \in a} N(k_{C_i};\, \theta), \qquad N_a^b(p_a^b;\, \theta) = \prod_{C_i \in a} N(p_{\bar{C}_k},\, \bar{C}_k \subseteq C_i;\, \theta).$$

Наконец, определим пространства

$$H_{\rho,\lambda}^a = \{\varphi(k_a)\colon\, |\varphi(k_a)| + |\varphi(k_a + h) - \varphi(k_a)|\, |h|^{-\lambda} \leqslant C N_a(k_a;\, \theta),\, |h| < 1\}$$

с нормой $\|\varphi\|_{\rho,\lambda}^a = \sup N_a^{-1}(k_a;\, \rho)\{|\varphi(k_a)| + |\varphi(k_a + h) - \varphi(k_a)|\, |h|^{-\lambda}\}$.

3. Теорема 1 *. *Пусть выполняется условие A, сформированное в* п. 5. *Тогда ядро* $R(p, p';\, z)$ *резольвенты* $R(z)$ *оператора* H_n *представляется в виде*

$$R(p,\, p';\, z) = \sum_a \left\{ \sum_{m=1}^{m(a)} \frac{\psi_a^{(m)}(k_a)\, \overline{\psi}_a^{(m)}(k_a')}{\lambda_a^{(m)} + T(p_a) - z} + \sum_{b,\, c \subset a} \sum_{m,\, l} \frac{\psi_b^{(m)}(k_b)}{\lambda_b^{(m)} + T(p_b) - z} \times \right.$$

$$\left. \times\, \Pi_{b,\, c;\, m,\, l}^a (p_b^a,\, p_c^{a'};\, z - T(p_a))\, \frac{\overline{\psi}_c^{(l)}(k_c')}{\lambda_c^{(l)} + T(p_c') - z} \right\} \delta(p_a - p_a'),$$

причем для $\Pi_{b,\, c;\, m,\, k}^a(l,\, l';\, z)$ *при* $z \in \Pi(a)$ *имеют место оценки*

$$|F_{b;\, m}^a(l,\, z;\, \varphi)| \leqslant C \|\varphi\|_{\rho,\lambda}^a N_b^a(l;\, \theta)(1 + |z|)^\delta,$$

$$|F_{b;\, m}^a(l + h,\, z + \Delta;\, \varphi) - F_{b;\, m}^a(l,\, z;\, \varphi)| \leqslant$$

$$\leqslant C \|\varphi\|_{\rho,\lambda}^a N_b^a(l;\, \theta)(1 + |z|)^\delta (|h|^\mu + |\Delta|^\nu),$$

где $\varphi \in H_{\rho,\lambda}^a$, $3/2 < \rho < \theta < \theta_0$, $\mu > \lambda > \nu > 0$, $\delta > 0$,

$$F_{b;\, m}^a(l,\, z;\, \varphi) = \sum_{c,\, k} \int \frac{\Pi_{b,\, c;\, m,\, k}(l,\, p_c^a;\, z)}{\lambda_c^{(k)} + T(p_c^a) - z}\, \overline{\psi}_c^{(k)}(k_c)\, \varphi(k_a)\, dk_a.$$

---

* При $n = 2$ эквивалентная теорема была впервые доказана А. Я. Повзнером ([2]), при $n = 3$ — Л. Д. Фаддеевым ([3]) и при $n = 4$ — К. Хеппом ([4]). Структура $R(p, p';\, z)$ для системы n, $n > 4$, частиц приведена без доказательства в ([4]).

Из теоремы 1, используя связь между пределом резольвенты на непрерывном спектре и обобщенными собственными функциями оператора H_n, получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Функции*

$$\psi^{\pm}_{a;\,m}(p;\,\tilde{p}_a) = \psi_a^{(m)}(k_a)\,\delta(p_a - \tilde{p}_a) +$$
$$+ \sum_{l,\, b\subset c,\, c} \frac{\psi_b^{(l)}(k_b)\,\Pi^c_{b,\,a;\,l,\,m}(p^c_b, \tilde{p}^c_a;\, \lambda_a^{(m)} + T(\tilde{p}^c_a) \pm i0)}{\lambda_b^{(l)} + T(p^c_b) - \lambda_a^{(m)} - T(\tilde{p}^c_a) \mp i0}\,\delta(p_c - \tilde{p}_c)$$

являются обобщенными собственными функциями оператора H_n, отвечающими точке спектра $\lambda_a^{(m)} + T(p_a)$. Они взаимно ортогональны и образуют полную систему, т. е. имеют место соотношения

$$\int \psi^{\pm}_{a;\,m}(p;\,\tilde{p}_a)\,\overline{\psi}^{\pm}_{b;\,l}(p;\,\tilde{\tilde{p}}_b)\,dp = \delta_{m,\,l}\delta_{a,\,b}\delta(\tilde{p}_a - \tilde{\tilde{p}}_a),$$

$$\sum_{m,\,a} \int d\tilde{p}_a \psi^{\pm}_{a;m}(p;\,\tilde{p}_a)\,\overline{\psi}^{\pm}_{a;m}(p';\,\tilde{p}_a) = \delta(p - p').$$

4. Приведем теперь схему доказательства теоремы 1 (ср. ([2])). Получим подходящее уравнение (2) для $R(z)$ и подберем такое банахово пространство, чтобы оператор $L(z)$ порождал в нем вполне непрерывный оператор, непрерывный по z, $z \in C \setminus [E_c, +\infty)$, в смысле операторной топологии, а затем изучим соответствующее однородное уравнение.

Уравнение

$$R(z) + R_0(z)VR(z) = R_0(z), \quad R_0(z) = (H_0 - zE)^{-1}, \qquad (*)$$

как неоднократно отмечалось в литературе, не годится для этих целей, и мы перестроим его *. Подставляя в уравнение (*) соотношение $V = \sum\limits_{k(a)=n-1} V_a$ и вводя обозначения $L_a(z) = R_0(z)\,V_a$, $k(a) = n-1$, получаем $R(z) + \sum\limits_{k(a_i)=n-1} L_{a_i}(z)\,R(z) = R_0(z)$. Считая $\operatorname{Im} z \neq 0$, обратим в этом уравнении сначала оператор $E + L_{a_1}(z)$, затем $E + L_{a_2}(z)$, и т. д. Вводя обозначения $(E + L_a(z))^{-1} = E + B_a(z)$. получаем уравнение

$$R(z) + \sum_{\substack{k(a_j)=n-1,\ s\geqslant 2\\ i_1>\ldots>i_{s-1},\ i_s>i_{s-1}}} B_{a_{i_1}}(z)\ldots B_{a_{i_{s-1}}}(z)\,L_{a_{i_s}}(z)\,R(z) = \prod_i (E + L_{a_i}(z))\,R_0(z).$$

При $n = 3$ это уравнение дает нужную информацию об операторе $R(z)$. При $n > 3$ его надо перестраивать. Для этого во втором члене левой части проведем сначала суммирование по разбиениям, удовлетворяющим соотношению $a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_s} = a$, а потом уже по всем разбиениям a. Суммы слагаемых с $a_{i_1} \cup \ldots \cup a_{i_s} = a$, $k(a) = n-2$, обозначим $L_a(z)$. Затем обратим все операторы $E + L_a(z)$, $k(a) = n-2$, и т. д. На $n-1$ шаге мы получаем

$$R(z) + L(z)R(z) = R^{(0)}(z), \qquad (2)$$

где $L(z) = L_{a_0}(z)$, $k(a_0) = 1$, и

$$E + L_a(z) = \prod_{b\subset a,\ k(b)=k(a)+1} (E + L_b(z))^{-1}\ldots$$
$$\ldots \prod_{c\subset a,\ k(c)=n-1} (E + L_c(z))^{-1}\Big[E + \sum_{c\subset a,\ k(c)=n-1} L_c(z)\Big],$$
$$R^{(0)}(z) = \prod_{k(a)=2} (E + L_a(z))^{-1}\ldots \prod_{k(b)=n-1} (E + L_b(z))^{-1}\,R_0(z).$$

Заметим, что решение уравнения (2) в классе ограниченных в $L_2(\mathbf{R}^{3n})$ операторов с областью значений, лежащей в $D(H_n)$, единственно.

* Эта перестройка (см. дальше) была введена Ф. А. Березиным ([4]).

5. Введем банахово пространство, в котором изучается оператор $L(z)$. Рассмотрим класс $\mathfrak{M}_{\theta,\mu}$ функций, представимых в виде

$$f(p)=\sum_{m,\,k(a)>1}\frac{\psi_a^{(m)}(k_a)}{\lambda_a^{(m)}+T(p_a)-z}f_{a,m}(p_a)\,\delta\Big(\sum_{C_i\in a}p_{C_i}\Big),$$

где функции $f_{a,m}(p_a)$ удовлетворяют оценке

$$|f_{a,m}(p_a)|+|f_{a,m}(p_a+h)-f_{a,m}(p_a)|\cdot|h|^{-\mu}\leqslant CN(p_a;\theta),\qquad |h|<1. \quad (3)$$

Класс $\mathfrak{M}_{\theta,\mu}$ является образом при отображении

$$(\pi_z\hat{f})(p,z)=\sum\frac{\psi_a^{(m)}(k_a)f_{a,m}(p_a)}{\lambda_a^{(m)}+T(p_a)-z}\delta\Big(\sum_{C_i\in a}p_{C_i}\Big)$$

банахова пространства * $\mathfrak{B}_{\theta,\mu}$ вектор-функций $\hat{f}=\{f_{a,m}(p_a),\ \sum\limits_{C_i\in a}p_{C_i}=0,$ $m=1,\ldots,m(a),\ k(a)>1\}$, удовлетворяющих (3), с нормой, определенной как сумма наименьших постоянных C, для которых имеет место (3).

Указанное выше исследование оператора $L(z)$ удается провести, только если выполняется

Условие А. Функции $v_{ij}(k)$ таковы, что операторы H_a, $k(a)>1$, не имеют точечного спектра на полуосях $[E_c{}^c,+\infty)$ и уравнения $f+L_a(z)f=0$, $k(a)>1$, не имеют решений в $\mathfrak{M}_{\theta,\mu}^a$ ** $\theta>{}^3/_2$, $\mu>0$, при $z=\lambda_b^{(m)}\pm i0$.

Предложение. *Существует такое* $\bar{\mu}=\bar{\mu}(n)$, *что оператор* $L(z)$ *представляется в виде* $(L(z)f)(p,z)=(\pi_z\hat{L}(z)\hat{f})(p,z)$, $f(p,z)=(\pi_z\hat{f})(p,z)$, *где* $\hat{L}(z)$ *обладает следующими свойствами:*

1) $\hat{L}(z)$ *вполне непрерывен в* $\mathfrak{B}_{\theta,\mu}$, $\theta<\theta_0$, $\mu<\bar{\mu}$, *если* z *лежит в комплексной плоскости с разрезом вдоль полуоси* $[E_c,+\infty)$; *при этом имеют место оценки*

$$\|\hat{L}(z)\|\leqslant C(1+|z|)^\delta,\quad \|\hat{L}(z+\Delta)-\hat{L}(z)\|\leqslant C(1+|z|)^\delta|\Delta|^\nu,\quad \delta,\nu>0.$$

2) *Однородное уравнение*

$$\hat{f}+\hat{L}(z)\hat{f}=0 \qquad (**)$$

не имеет решений при комплексных z; *если при* $z=\lambda+i0$ $(\lambda-i0)$, $\lambda\neq\lambda_a^{(m)}$, $m=1\ldots m(a)$, $k(a)>1$, *уравнение* (**) *имеет нетривиальное решение* $\hat{f}(\lambda)\in\mathfrak{B}_{\theta,\mu}$, $\theta>{}^3/_2$, $\mu>0$, *то* λ *является собственным значением оператора* H, *а* $\psi(\lambda)$, $\psi(p,\lambda)\delta(p_1+\ldots+p_n)=(\pi_{\lambda+i0}\hat{f}(\lambda))(p,\lambda)$ $(\pi_{\lambda-i0}\hat{f}(\lambda))$,— *отвечающей ему собственной функцией.*

Теорема 1 вытекает из этого предложения и некоторых замечаний о виде свободного члена $R^{(0)}(z)$ уравнения (2), которые мы здесь не приводим.

Автор пользуется случаем, чтобы выразить благодарность Ф. А. Березину за полезные советы и стимулирующие обсуждения вопросов, затронутых в работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
22 VI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. А. Березин, ДАН, **163**, № 4, 795 (1965). [2] А. Я. Повзнер, Матем. сборн., **32** (74), 1, 109 (1953). [3] Л. Д. Фаддеев, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, **69** (1963). [4] К. Hepp, Helv. Phys. acta, **42**, 3, 425 (1969). [5] T. Kato, Trans. Am. Math. Soc., **70**, № 2, 195 (1951).

* Это пространство аналогично пространству, примененному для тех же целей Л. Д. Фаддеевым ([3]) при исследовании системы трех частиц.

**

$$\mathfrak{M}_{\theta,\mu}^a=\Big\{f(k_a):f(k_a)=\sum_{m,\,b\subset a}\frac{\psi_b^{(m)}(k_b)f_{b,m}(p_b^a)}{\lambda_b^{(m)}+T(p_b)-z},$$

$$|f_{b;m}(p_b^a)|+|f_{b;m}(p_b^a+h)-f_{b;m}(p_b^a)|\cdot|h|^{-\mu}\leqslant CN_b^a(p_b^a;\theta)\Big\},$$