

УДК 539.30

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Л. И. ШКУТИН

ВВЕДЕНИЕ ДВУХ РАЗРЕШАЮЩИХ ФУНКЦИЙ В УРАВНЕНИЯ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

(Представлено академиком В. В. Новожиловым 23 XI 1971)

Известно, что уравнения Маргерра — Власова, описывающие напряженно-деформированные состояния пологих оболочек, пригодны для описания таких состояний непологих оболочек, которые характеризуются большим показателем изменчивости по направлениям координатных линий. К этому следует добавить, что названные уравнения описывают также чисто безмоментные состояния оболочек малой гауссовой кривизны (при отбрасывании моментных членов). Потеря точности этих уравнений имеет место при отыскании безмоментных решений для оболочек конечной гауссовой кривизны и решений, характеризуемых разными показателями изменчивости в двух направлениях, для оболочек малой гауссовой кривизны (например, решения некоторых задач для длинных цилиндрических оболочек).

Ниже дано такое уточнение безмоментных и моментных членов уравнений теории пологих оболочек, которое значительно расширяет область их применимости, сохраняя присущую им симметрию.

Воспользовавшись установленной в ⁽¹⁾ статико-геометрической аналогией между тензорами усилий N_{ij} и моментов M_{ij} , с одной стороны, и тензорами тангенциальных p_{ij} и изгибных q_{ij} энергетических деформаций, с другой, представим уравнения равновесия и условия совместимости в симметричном виде

$$\nabla_\alpha N^{\alpha j} - b_\gamma^j \nabla_\alpha M^{\alpha\gamma} = X^j, \quad b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \nabla_\beta \nabla_\alpha M^{\alpha\beta} = X, \quad c_{\alpha\beta} (N^{\alpha\beta} + b_\gamma^\beta M^{\gamma\alpha}) = 0; \quad (1)$$

$$\nabla_\alpha Q^{\alpha j} - b_\gamma^j \nabla_\alpha P^{\alpha\gamma} = Y^j, \quad b_{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta} + \nabla_\beta \nabla_\alpha P^{\alpha\beta} = Y, \quad c_{\alpha\beta} (Q^{\alpha\beta} + b_\gamma^\beta P^{\gamma\alpha}) = 0. \quad (2)$$

Здесь использована обычная тензорная символика, причем все индексы пробегуют значения 1 и 2. Тензоры P^{ij} и Q^{ij} выражаются через p_{ij} и q_{ij} следующим образом:

$$P^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} p_{\alpha\beta}, \quad Q^{ij} = c^{i\alpha} c^{j\beta} q_{\alpha\beta}.$$

Правые части X^j и Y уравнений (2) введены для того, чтобы при необходимости учесть нелинейные члены. Если таковые имеются в уравнениях (1), то их следует включить в X^j и X .

Относительно величин, входящих в системы (1) и (2), предположим следующее: 1) $X^j \equiv Y^j \equiv 0$; 2) изменчивость по координатам коэффициентов b_i^j (кривизн недеформированной срединной поверхности) мала по сравнению с изменчивостью характеристик деформации; 3) тензоры N^{ij} и Q^{ij} мало отличаются от симметричных. При этих предположениях рассматриваемые системы упрощаются к виду

$$\nabla_\alpha N_+^{\alpha j} \approx 0, \quad b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta M^{\alpha\beta} = X, \quad c_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} \approx 0; \quad (3)$$

$$\nabla_\alpha Q_+^{\alpha j} \approx 0, \quad b_{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha \nabla_\beta P^{\alpha\beta} = Y, \quad c_{\alpha\beta} Q^{\alpha\beta} \approx 0, \quad (4)$$

где $N_+^{ij} = N^{ij} - b_\alpha^i M^{\alpha j}$ и $Q_+^{ij} = Q^{ij} - b_\alpha^i P^{\alpha j}$ суть симметричные тензоры.

Левые уравнения систем (3) и (4) могут быть удовлетворены подстановкой (если принять во внимание второе предположение)

$$N_+^{ij} = -B(c^{ia}c^{jb}\nabla_a\nabla_b\varphi + Ka^{ij}\varphi), \quad Q_+^{ij} = -c^{ia}c^{jb}\nabla_a\nabla_b\chi + Ka^{ij}\chi. \quad (5)$$

Здесь φ и χ — произвольные, необходимое число раз дифференцируемые функции, B — масштабный коэффициент, уравнивающий их размерности, K — гауссова кривизна срединной поверхности.

Имея

$$N^{ij} = N_+^{ij} + b_a^i M^{aj}, \quad Q^{ij} = Q_+^{ij} + b_a^i P^{aj}, \quad (6)$$

перепишем средние уравнения систем (3) и (4) в виде

$$b_{\alpha\beta}(N_+^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha M^{\gamma\beta}) + \nabla_\alpha\nabla_\beta M^{\alpha\beta} = X, \quad b_{\alpha\beta}(Q_+^{\alpha\beta} + b_\gamma^\alpha P^{\gamma\beta}) + \nabla_\alpha\nabla_\beta P^{\alpha\beta} = Y. \quad (7)$$

Для общности эти уравнения считаем нелинейными, понимая под X и Y следующие выражения ⁽²⁾:

$$X = -Z + N^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}, \quad Y = 1/2 Q^{\alpha\beta}q_{\alpha\beta}, \quad q_{ij} = c_{ia}c_{jb}Q^{\alpha\beta}.$$

(Z — нормальная поверхностная нагрузка).

Во всех случаях, когда с помощью соотношений связи величины M^{ij} и P^{ij} могут быть выражены через Q_+^{ij} и N_+^{ij} , уравнения (5) дают систему относительно введенных функций φ и χ .

Для наглядности осуществим переход к физическим составляющим тензоров в главной системе координат, x_1, x_2 на срединной поверхности оболочки. Пусть $l_1(x_1, x_2)$ и $l_2(x_1, x_2)$ — параметры Ляме этой поверхности, $k_1(x_1, x_2)$ и $k_2(x_1, x_2)$ — ее главные кривизны, $N_{(ij)}, q_{(ij)}, \dots$ — физические составляющие тензоров $N^{ij}, q_{ij}, \dots$. Заметим, что $N_{(ij)}$ и $M_{(ij)}$ — обычные (соответствующие определению Лява) усилия и моменты, $p_{(ij)} = \varepsilon_{(ij)}$ — компоненты тангенциальной деформации Муштарп — Галимова, а величины $q_{(ij)}$ связаны с компонентами изгибной деформации Лява κ, τ, κ_2 следующим образом:

$$q_{(ii)} = \kappa_i, \quad q_{(12)} = \tau - k_1\varepsilon_{21}, \quad q_{(21)} = \tau - k_2\varepsilon_{12}.$$

Из (5) и (6) находим

$$\begin{aligned} N_{(22)} &= N_{(22)}^+ - k_2 M_{(22)}, \quad N_{(21)} = N_{(21)}^+ - k_2 M_{(21)}, \quad q_{(11)} = q_{(11)}^+ + k_2 p_{(11)}, \\ q_{(12)} &= q_{(12)}^+ + k_2 p_{(12)}, \\ N_{(22)}^+ &= -B(\nabla_1^2 + K)\varphi, \quad N_{(21)}^+ = B\nabla_1\nabla_2\varphi, \quad q_{(11)}^+ = -(\nabla_1^2 + K)\chi, \quad q_{(12)}^+ = -\nabla_1\nabla_2\chi (1 \rightleftharpoons 2), \\ \nabla_1^2 &= \frac{1}{l_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{1}{l_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{1}{l_1 l_2^2} \frac{\partial l_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad \nabla_1\nabla_2 = \frac{1}{l_1 l_2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{1}{l_1} \frac{\partial l_1}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{1}{l_2} \frac{\partial l_2}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \end{aligned}$$

Предполагая, что оболочка упругая и изотропная, привлечем следующие соотношения связи (A, D, ν — известные константы):

$$\begin{aligned} M_{(11)}^+ &= D(q_{(11)}^+ + \nu q_{(22)}^+), \quad M_{(12)} = (1 - \nu) D q_{(12)}^+, \quad p_{(22)} = A(N_{(22)}^+ - \nu N_{(11)}^+), \\ p_{(21)} &= (1 + \nu) A N_{21}^+ \quad (1 \rightleftharpoons 2). \end{aligned}$$

С их помощью находим

$$\begin{aligned} N_{(22)} &\approx -B(\nabla_1^2 + K)\varphi + Dk_2\nabla_2^2\chi, \quad N_{(21)} \approx B\nabla_1\nabla_2\varphi, \\ q_{(11)} &\approx -(\nabla_1^2 + K)\chi - ABk_2\nabla_2^2\varphi, \quad q_{(12)} \approx -\nabla_1\nabla_2\chi, \end{aligned} \quad (1 \rightleftharpoons 2). \quad (8)$$

а уравнение (7) преобразуем к виду (H — средняя кривизна срединной поверхности, $\nabla^2 = \nabla_1^2 + \nabla_2^2, C = AB = B^{-1}D$)

$$\begin{aligned} (k_2\nabla_1^2 + k_1\nabla_2^2 + 2HK)\varphi - C(\nabla^2 + 4H^2)\nabla^2\chi &= B^{-1}X, \\ C(\nabla^2 + 4H^2)\nabla^2\varphi + (k_2\nabla_1^2 + k_1\nabla_2^2 + 2HK)\chi &= Y; \end{aligned} \quad (9)$$

здесь $X = -Z + N_{(11)}q_{(11)} + N_{(12)}q_{(12)} + N_{(21)}q_{(21)} + N_{(22)}q_{(22)},$ $Y =$
 $= q_{(11)}q_{(22)} - q_{(12)}q_{(21)},$ причем величины $N_{(ij)}$ и $q_{(ij)}$ определяются выра-
 жениями (8).

Разрешающие функции φ и χ , введенные в полном соответствии со статико-геометрической аналогией, обеспечивают совершенную симметрию левых частей уравнения (9). Если первую из этих функций называть функцией усилий, то вторую следует называть функцией изгибных деформаций (вообще говоря, она не совпадает с прогибом оболочки).

Так как при выводе уравнений (9) использованы более слабые ограничения, чем при построении теории пологих оболочек, то эти уравнения описывают более широкий класс решений. Они описывают, в частности, безмоментные решения для оболочек конечной, но слабо переменной гауссовой кривизны и решения, характеризуемые разными показателями изменчивости по координатам, для оболочек малой гауссовой кривизны (так, полученные с помощью (9) решения задач устойчивости для длинных цилиндрических оболочек имеют ту же точность, что и решения более сложных уравнений работы (³)).

Институт гидродинамики
 Сибирского отделения Академии наук СССР
 Новосибирск

Поступило
 19 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. Л. Гольденвейзер, ПММ, 9, в. 6, 463 (1945). ² Н. А. Алумяз, ПММ, 13, в. 1, 95 (1949). ³ Л. И. Шкутин, Тр. VI Всесоюз. конфер. по теории оболочек и пластин, М., 1966, стр. 841.