Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 4

УДК 531.51 ФИЗИКА

З. А. ШТЕЙНГРАД

ГАРМОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ОТСЧЕТА В ТЕОРИИ ТЯГОТЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

(Представлено академиком В. А. Фоком 4 XI 1971)

Введем понятие гармонической системы отсчета, определив ее следующим образом. Система отсчета называется гармонической, если в числе принадлежащих ей систем координат есть хотя бы одна гармоническая (тогда их существует бесчисленное множество).

Выделение класса гармонических систем отсчета имеет определенные основания. Прежде всего, существование гармонических систем координат само по себе является, как указывает В. А. Фок ([1]), «фактом первостепенного теоретического и практического значения». В то же время, как известно, существует концепция системы отсчета, предложенная А. А. Зельмановым, на основе метода хронометрических инвариантов ([2]). Поэтому гармонические координатные условия ([1])

$$\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 0, \tag{1}$$

записанные в обозначениях, принятых в теории хронометрических инвариантов,

$$F^i = -\Delta^i_{kl} h^{kl} = \frac{1}{\sqrt{h}} \frac{{}^*\partial}{\partial x^k} \sqrt{h}\, h^{ik}, \tag{2}$$

$$D = g^{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{g_{0\beta}}{\sqrt{g_{00}}}, \tag{3}$$

и не являющиеся 3-мерно ковариантными величинами, с неизбежностью должны выделять некоторый класс систем отсчета. В противном случае условия гармоничности (2), (3) выделяли бы только некоторые координаты, принадлежащие любой системе отсчета, что до некоторой степени понизило бы их принципиальное значение для теории тяготения.

Для выяснения вопроса о гармоничности системы отсчета заметим, что гармонические координаты являются едва ли не единственными, удовлетворяющими линейному общековариантному уравнению ([1])

$$\Box\varphi = g^{\alpha\beta}\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi = 0. \tag{4}$$

Как известно ([2]), четырехмерные координатные системы, принадлежащие одной и той же системе отсчета, связаны преобразованиями

$$x'^i = x'^i(x^1, x^2, x^3), \tag{5}$$

$$x'^0 = x'^0(x^1, x^2, x^3, x^0). \tag{6}$$

Предположим, что мы выбрали произвольную систему отсчета и в ней координаты x^α. Если она допускает также и гармонические координаты $x_h{}^\alpha$ (т. е. является гармонической системой отсчета по определению), то эти координаты должны быть связаны соотношениями вида (5) и (6). Так как гармонические координаты удовлетворяют уравнению (4), то условия, накладываемые на систему отсчета, для того чтобы она допускала преобразования (5) и (6), одновременно должны быть условиями интегрируемости уравнения (4), линейный оператор которого записан в координатах x^α.

Перепишем уравнение (4) в хронометрически инвариантном виде

$$h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k\varphi - F^i\,{}^*\nabla_i\varphi - \frac{{}^*\partial^2\varphi}{\partial x^{02}} + D\,\frac{{}^*\partial\varphi}{\partial x^0} = 0.$$

Рассматривая его отдельно для пространственных и временной гармонических координат и учитывая (5), получим

$$h^{ik}\,{}^*\nabla_i\,{}^*\nabla_k\,(x_h^m) = F^i\,{}^*\nabla_i\,(x_h^m), \tag{7}$$

$$\Box\,(x_h^0) = 0. \tag{8}$$

Уравнение (8) интегрируется при любых координатах x^α. Это следует из того, что условия гармоничности (2) и (3) являются дополнительными координатными условиями к общековариантным уравнениям Эйнштейна, допускающим преобразования координат, содержащие четыре произвольные функции. Поэтому, если уравнения тяготения решены в некоторой системе координат, всегда можно перейти к гармоническим координатам. Значит, уравнение (8) всегда имеет решение вида (6).

Для уравнения (7) такое рассуждние, вообще говоря, неприменимо, поскольку решение уравнения (7) не должно зависеть от временной координаты, в то время как коэффициенты в общем случае зависят от нее. Только для случаев стационарных систем отсчета интегрируемость уравнения (6) следует из приведенных выше рассуждений. Поэтому любая стационарная система отсчета является гармонической.

Итак, необходимо найти условия интегрируемости уравнения

$$h^{ih*}\nabla_i\varphi_k = F^i\varphi_i; \qquad \varphi_k = {}^*\nabla_k\varphi, \tag{9}$$

три решения которого будут пространственными гармоническими координатами.

Применяя к уравнению (9) хронометрически инвариантный оператор дифференцирования по времени и учитывая независимость φ_k от x^0, получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned}
h^{ik}\,{}^*\nabla_i\varphi_k &= F^k\varphi_k,\\
D^{ik}\,{}^*\nabla_i\varphi_k &= K^k\varphi_k,\\
{}^*\dot{D}^{ik}\,{}^*\nabla_i\varphi_k &= L^k\varphi_k,\\
{}^*\ddot{D}^{ik}\,{}^*\nabla_i\varphi_k &= M^k\varphi_k,\\
{}^*\dddot{D}^{ik}\,{}^*\nabla_i\varphi_k &= N^k\varphi_k,\\
{}^*\ddddot{D}^{ik}\,{}^*\nabla_i\varphi_k &= R^k\varphi_k,
\end{aligned} \tag{10}$$

где D^{ik} — хронометрически инвариантный тензор скоростей деформации пространства отсчета; точки со звездочкой означают хронометрически инвариантное дифференцирование по времени; K^k, L^k, ... — хронометрически инвариантные векторы.

Будем рассматривать правые части (10) в качестве известных функций координат x^α. Так как

$${}^*\nabla_i\varphi_k = {}^*\nabla_k\varphi_i,$$

(10) представляет систему алгебраических уравнений относительно шести неизвестных ${}^*\nabla_i\varphi_k$.

Система (10) в общем случае может обладать сколь угодно большим числом уравнений. Поэтому, для того чтобы она имела хотя бы одно решение, необходимо обращение в нуль всех характеристических определителей. Если это условие выполняется, то решение системы уравнений (10) можно записать в виде

$$
{}^*\nabla_i \varphi_k = S_{ik}^{l} \varphi_l, \tag{11}
$$

$$
S_{ik}^{l} = \left(F^l \frac{\partial \Delta}{\partial h^{ik}} + K^l \frac{\partial \Delta}{\partial D^{ik}} + L^l \frac{\partial \Delta}{\partial^* \dot{D}^{ik}}\right) \Big/ \Delta +
+ M^l \frac{\partial \Delta}{\partial^* \ddot{D}^{ik}} + N^l \frac{\partial \Delta}{\partial^* \dddot{D}^{ik}} + R^l \frac{\partial \Delta}{\partial^* \ddddot{D}^{ik}}\Big) \Big/ \Delta \tag{12}
$$

хронометрически инвариантный тензор, а Δ — определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных и являющийся хронометрически инвариантной плотностью веса четыре.

Как известно ([3]), необходимые и достаточные условия интегрируемости системы дифференциальных уравнений (11) можно получить, применяя коммутатор из ковариантных производных $({}^*\nabla_i{}^*\nabla_k - {}^*\nabla_k{}^*\nabla_i)$ к вектору φ_k.

Тогда, используя (12), можно условия интегрируемости записать в форме

$$
({}^*\nabla_i{}^*\nabla_k - {}^*\nabla_k{}^*\nabla_i)\,\varphi_l \equiv H_{lik}^{\cdot\cdot\cdot m} \varphi_m = ({}^*\nabla_k S_{il}^m - {}^*\nabla_i S_{kl}^m + S_{il}^n S_{nk}^m - S_{kl}^n S_{ni}^m)\,\varphi_m. \tag{13}
$$

(Свойства тензора $H_{eik}^{\cdot\cdot\cdot m}$ рассмотрены в ([2]).)

Равенства (13) должны иметь место при $\varphi = x_h^1$, $\varphi = x_h^2$, $\varphi = x_h^3$. Так как якобиан преобразования

$$
J = \frac{\partial (x_h^1,\ x_h^2,\ x_h^3)}{\partial (x^1, x^2, x^3)}
$$

не должен обращаться в нуль, то должны равняться нулю коэффициенты при φ_k в (13), т. е.

$$
H_{lik}^{\cdot\cdot\cdot m} = {}^*\nabla_k S_{il}^m - {}^*\nabla_i S_{kl}^m + S_{nk}^m S_{il}^n - S_{kl}^n S_{ni}^m. \tag{14}
$$

Хронометрически инвариантные и 3-мерно ковариантные равенства (14) и являются необходимыми условиями гармоничности системы отсчета.

К сказанному необходимо добавить следующее. Если определитель Δ будет равен нулю, выражение (12) становится, на первый взгляд, бессмысленным. Но если система отсчета является гармонической, то из (2), (10) и (12) следует, что неопределенность в (12) раскрывается и S_{kl}^{i} имеет конечное значение.

Исходя из того, что S_{kl}^{i} — хронометрически инвариантный тензор, следует, что в любой гармонической системе отсчета неопределенность в (12) раскрывается. Если S_{kl}^{i} в некоторой системе отсчета примет бесконечное значение, то она не является гармонической.

Следовательно, необходимыми условиями гармоничности системы отсчета являются равенства (14). Достаточными условиями являются равенства (14) и требование, согласно которому тензор S_{kl}^{i} должен иметь конечное значение.

Государственный астрономический институт
им. П. К. Штернберга
Москва

Поступило
2 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, М., 1961. [2] А. Л. Зельманов, Тр. VI совещ. по космогонии, М., 1959. [3] Л. П. Эйзенхарт, Непрерывные группы преобразований, М., 1947