Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 4

УДК 517.55 МАТЕМАТИКА

Ш. ЯРМУХАМЕДОВ

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 7 XII 1971)

1. Через $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и $y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ будем обозначать точки m-мерного вещественного эвклидова пространства $\mathbf{R}^m$, через D — ограниченную область этого пространства с границей ∂D, гладкой в смысле Ляпунова, а через G — неограниченную область того же пространства (также с гладкой по Ляпунову границей ∂G). Через $A(D)$ (соответственно $A(G)$) мы обозначим совокупность функций $U(x)$, гармонических в области D (соответственно G) и непрерывных со своими частными производными первого порядка вплоть до границы этой области (в случае $A(G)$ непрерывность требуется лишь в конечных точках границы области D).

Известно, что для функций класса $A(D)$ справедлива формула Грина

$$\int\limits_{\partial D} \left[\varphi(x, y) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, y)\right] d\sigma_y = \begin{cases} u(x), & x \in D, \\ 0, & x \notin \bar{D}, \end{cases} \qquad (1,1)$$

(здесь n — направление внешней нормали к ∂D в точке интегрирования y, $d\sigma_y$ — элемент площади ∂D в точке y, а

$$\varphi(x, y) = \frac{r^{2-m}}{(m-2)\,\omega_m}, \quad m \geqslant 3; \quad \varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, \quad m = 2,$$

где r — расстояние между точками x и y, а ω_m — площадь поверхности единичного шара в пространстве $\mathbf{R}^m$).

В работе ([1]) была поставлена и решена следующая задача: пусть $U(x) \in A(D)$ и интеграл

$$\int\limits_{\partial D} \left[\varphi(x, y) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x, y)\right] d\sigma_y \qquad (1,2)$$

сходится. При каких ограничениях на рост $U(x)$ в G при $x \to \infty$ можно утверждать, что значение интеграла (1, 2) совпадает со значением $U(x)$ (при $x \in G$)?

Сходимость интеграла (1, 2) означает, грубо говоря, что величины $U(y)$ и $\frac{\partial U}{\partial n}(y)$ остаются ограниченными, когда $y \to \infty$, оставаясь на ∂G. Однако аналогичная постановка задачи возможна и в случае, когда $U(y)$ и $\frac{\partial U}{\partial n}(y)$ стремятся к бесконечности при $y \to \infty$, $y \in \partial G$ (при $m = 3$ эта задача исследовалась в работе автора ([2])). В связи с такой постановкой задачи возникает необходимость построения формул, аналогичных формуле Грина (1,1), но с другим ядром $\Phi(x, y)$, которое стремится к нулю при $y \to \infty$, $y \in \partial G$, значительно быстрее, чем ядро $\varphi(x, y)$. Подобные формулы могут быть полезны и для других задач. В настоящей работе предлагается один способ построения целого класса таких формул.

2. Пусть $K(\zeta)$ — целая функция комплексной переменной $\zeta = \xi + i\eta$, где ξ и η — вещественные числа, принимающаяся на мнимой оси, т. е. при $\xi = 0$, вещественные значения. Для таких функций $K(\zeta)$ значения $K^{(p)}(i\eta)$ вещественны при четных p и чисто мнимы при нечетных p. Поэтому при любых вещественных ξ и η для функции $\operatorname{Re} K(\zeta)$ имеет место

разложение

$$\operatorname{Re} K(\xi + i\eta) = \sum_{0}^{\infty} \frac{K^{(2p)}(i\eta)}{(2p)!} \xi^{2p}. \tag{2,1}$$

Аналогично, если целая функция $K_1(\zeta)$, $\zeta = \xi + i\eta$, на мнимой оси принимает только мнимые значения, то имеет место разложение

$$\operatorname{Re} K_1(\xi + i\eta) = \sum_{0}^{\infty} \frac{K^{(2p+1)}(i\eta)}{(2p+1)!} \xi^{2p+1}. \tag{2,2}$$

Функции $K(\zeta)$ будем предполагать удовлетворяющими условиям

$$K(i\eta) \neq 0,$$
$$\sup_{\xi \geqslant 1} |\xi^p K^{(p)}(\xi + i\eta)| = M(p, \eta) < \infty \tag{2,3}$$

при любых $-\infty < \eta < \infty$, $0 \leqslant p \leqslant m$; $K^{(0)} \equiv K$.

Пусть $m > 2$. Положим

$$s = (y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_{m-2} - x_{m-2})^2, \qquad \rho = \sqrt{s + (y_{m-1} - x_{m-1})^2}. \tag{2,4}$$

Функцию $\Phi(x, y)$ мы определим при $\rho > 0$ следующими равенствами: если $m = 2n + 1$, $n \geqslant 1$, то

$$C_m K(ix_m) \Phi(x, y) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \int_1^{\infty} \operatorname{Re} \left[\frac{K(\rho u + iy_m)}{\rho u + i(y_m - x_m)} \right] \frac{du}{\sqrt{u^2 - 1}}, \tag{2,5}$$

где $C_m = (-1)^n 2^{-n} (m-2)! \pi \omega_m$;
если $m = 2n$, $n \geqslant 2$, то

$$C_m K(ix_m) \Phi(x, y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial s^{n-2}} \operatorname{Re} \left[\frac{K(\rho + iy_m)}{\rho(\rho + iy_m - ix_m)} \right], \tag{2,5'}$$

где $C_m = (-1)^{n-1} (n-1)! (m-2) \pi \omega_m$.

Лемма. *Функция $\Phi(x, y)$, определенная при $\rho > 0$ формулами (2,5) и (2,5'), может быть представлена в виде*

$$\Phi(x, y) = \varphi(x, y) + g(x, y),$$

где $\varphi(x, y)$ — ядро классической формулы Грина (1,1), а $g(x, y)$ — некоторая функция, определенная для всех значений $x \in \mathbf{R}^m$ и $y \in \mathbf{R}^m$ и гармоническая по y во всем пространстве.

Доказательство. Проведем рассуждения лишь для несколько более сложного случая $m = 2n + 1$. Для удобства введем обозначения

$$f(\zeta) = \frac{K(\zeta)}{\zeta - ix_m}, \qquad \Psi(x, y) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}} \int_1^{\infty} f(\rho u + iy_m)(u^2 - 1)^{-1/2} du.$$

В этих обозначениях

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{C_m K(ix_m)} \operatorname{Re} \Psi(x, y).$$

Наша первая цель — доказательство гармоничности функции по y при $\rho > 0$ (отсюда будет следовать и гармоничность функции Φ по y при $\rho > 0$). Для этой цели докажем формулу

$$\Psi(x, y) = \alpha_n \int_1^{\infty} f^{(2n-2)}(\rho u + iy_m)(u^2 - 1)^{n-3/2} du, \qquad \alpha_n = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1} \cdot 1 \cdot 3 \ldots (2n-3)}. \tag{2,5''}$$

Поскольку $\rho = \sqrt{s + (y_{m-1} - x_{m-1})^2}$, формула (2,5″) вытекает из определения Ψ и из равенства

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p}\int\limits_1^\infty f(u\sqrt{s+a}+b)(u^2-1)^{-1/2}\,du =$$
$$= \alpha_{p+1}\int\limits_1^\infty f^{(2p)}(u\sqrt{s+a}+b)(u^2+1)^{p-1/2}du,$$

которое легко проверяется по индукции. Действительно, при $p=0$ это равенство очевидно. Если оно доказано для $p-1$, то

$$\frac{\partial^p}{\partial s^p}\int\limits_1^\infty f(u\sqrt{s+a}+b)(u^2-1)^{-1/2}\,du =$$
$$= \frac{-\alpha_p}{2(2p-3)}\int\limits_1^\infty f^{(2p)}(u\sqrt{s+a}+b)(u^2-1)^{p-1/2}\,du,$$

а это означает, что равенство справедливо и для p.

Перейдем к доказательству гармоничности функции $\Psi(x, y)$ по y. Дифференцированием формулы (2,5″) получаем

$$\Delta\Psi = \alpha_n\int\limits_1^\infty f^{(2n)}(\rho u+iy_m)(u^2-1)^{n-1/2}\,du +$$
$$+(2n-1)\alpha_n\int\limits_1^\infty \frac{1}{\rho}f^{(2n-1)}(\rho u+iy_m)\,u\,(u^2-1)^{n-3/2}du.$$

Интегрируя по частям второй интеграл, видим, что он равен первому с обратным знаком и потому $\Delta\Psi=0$. Все наши операции с интегралами были законченны, поскольку условие (2,3) на функцию $K(\zeta)$ обеспечивало их равномерную сходимость при $\rho>0$.

Теперь заметим, что при $K(\zeta)\equiv 1$ имеет место равенство

$$\Phi(x, y) = \frac{1}{C_m}\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\int\limits_1^\infty \frac{\rho u}{\rho^2u^2+(y_m-x_m)^2}\,\frac{du}{\sqrt{u^2-1}} = \varphi(x, y),$$

из которого для разности $\Phi(x, y)-\varphi(x, y) = g(x, y)$ находим

$$C_mK(ix_m)\,g(x, y) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\int\limits_1^\infty \mathrm{Re}\,\frac{K(\rho u+iy_m)-K(ix_m)}{\rho u+i(y_m-x_m)}\,\frac{du}{\sqrt{u^2-1}}. \tag{2,6}$$

Обозначим правую часть равенства (2,6) через $g_1(x, y)$. Для доказательства леммы достаточно доказать непрерывную дифференцируемость функции $g_1(x, y)$ во всем пространстве $y\in\mathbf{R}^m$ $(x\in\mathbf{R}^m)$, так как в этом случае функция $g(x, y)$, определенная и гармоническая по переменному y при $\rho>0$ как разность двух гармонических функций, будет определена для всех значений $x\in\mathbf{R}^m$, $y\in\mathbf{R}^m$ и непрерывно дифференцируема всюду по переменному y, включая и точку $y=x$ и, следовательно, согласно известному свойству (о продолжении) гармонических функций, она будет гармоническая по переменному y во всем пространстве $\mathbf{R}^m$.

Перейдем к доказательству непрерывности и дифференцируемости функции $g_1(x, y)$ по переменному y $(x\in\mathbf{R}^m)$ во всем пространстве $\mathbf{R}^m$, включая и точку $y=x$. С этой целью сделаем замену переменных в интеграле (2,6) по формуле $\rho^2u^2=t^2+\rho^2$ и разобьем промежуток интегрирования на две части $0\leqslant t\leqslant 1$ и $1\leqslant t\leqslant\infty$. Тогда для $g_1(x, y)$ получаем

$$g_1(x, y) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\left(\int\limits_1^0+\int\limits_1^\infty\right)\mathrm{Re}\,\frac{K(\sqrt{t^2+\rho^2}+iy_m)-K(ix_m)}{\sqrt{t^2+\rho^2}+i(y_m-x_m)}\,\frac{dt}{\sqrt{t^2+\rho^2}}. \tag{2,7}$$

Подынтегральная функция определена и непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 1$ сколько угодно раз по переменным s, y во всем пространстве $\mathbf{R}^m$, причем каждый раз интеграл, полученный после дифференцирования, в силу условия (2,3), равномерно сходится при всех s, y, x. Поэтому второе слагаемое в (2,7) представляет непрерывно дифференцируемую функцию при всех x, y, s. Этим свойством обладает и первое слагаемое в равенстве (2,7). Действительно, целая функция

$$K_1(\zeta) = \frac{K(\zeta) - K(ix_m)}{\zeta - ix_m}$$

комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$ принимает на мнимой оси, т. е. при $\xi = 0$ чисто мнимые значения, поэтому согласно разложению (2,2) при любых вещественных ξ, η имеет место разложение

$$\frac{1}{\xi} \operatorname{Re} K_1(\xi + i\eta) = \sum_0^\infty \frac{K_1^{(2p+1)}(i\eta)}{(2p+1)!} \xi^{2p}.$$

Теперь, полагая в этом равенстве $\xi^2 = \rho^2 + u^2$, $\eta = y_m$, видим, что подынтегральная функция в первом слагаемом правой части равенства (2,7) есть целая функция относительно переменных t^2, y_m, $\rho^2 = s + (y_{m-1} - x_{m-1})^2$ и поэтому она дифференцируема по s сколько угодно раз, причем полученная после дифференцирования функция снова является целой функцией по указанным переменным и, следовательно, интеграл, как функция y, есть всюду непрерывно дифференцируемая функция. Лемма доказана при $m = 2n + 1$, $n \geqslant 1$. Доказательство леммы при $m = 2n$, $n \geqslant 2$ проводится по той же схеме с использованием разложения (2,1).

3. Построенное ядро $\Phi(x, y)$ позволяет обобщить классическую формулу Грина. Формулируем соответствующий результат. Обозначим через G_R часть G, лежащую вне шара радиуса R с центром в нуле пространства $\mathbf{R}^m$. Тогда имеет место

Теорема. *Пусть $U(y) \in A(G)$. Если при любом фиксированном*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{\partial G_R} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y)\right] d\sigma_y = 0,$$

то

$$\int\limits_{\partial G} \left[\Phi(x, y) \frac{\partial U}{\partial n}(y) - U(y) \frac{\partial \Phi}{\partial n}(x, y)\right] d\sigma_y = \begin{cases} U(x), & x \in G, \\ 0, & x \notin G \cup \partial G. \end{cases}$$

Доказательство теоремы проводится по классической схеме.

Пользуясь случаем, автор выражает глубокую благодарность М. А. Евграфову за постановку задач и постоянное внимание.

Самаркандский государственный университет им. А. Навои

Поступило 16 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Евграфов, Изв. АН СССР, сер. матем., 27, № 4, 843 (1963). [2] Ш. Ярмухамедов, Изв. высш. учебн. завед., математика, № 2 (93), 107 (1970).