

УДК 517.946.8

МАТЕМАТИКА

Член-корреспондент АН СССР А. В. БИЦАДЗЕ

ОБ ОДНОЙ СИСТЕМЕ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

В теории установившегося плоского медленного движения несжимаемой вязкой жидкости принято, что компоненты $u(x, y)$, $v(x, y)$ вектора скорости и давление $p(x, y)$ удовлетворяют системе уравнений с частными производными

$$u_{xx} + u_{yy} = kp_x, \quad v_{xx} + v_{yy} = kp_y, \quad k = \text{const}, \quad u_x + v_y = 0 \quad (1)$$

и краевым условиям

$$u = F_1(t), \quad v = F_2(t), \quad t \in S, \quad (2)$$

где S — граница области T , занимаемой потоком жидкости (¹⁻³).

При предположении непрерывной дифференцируемости $u(x, y)$ и $v(x, y)$ до третьего порядка, а $p(x, y)$ — до второго порядка, система (1) равносильна системе

$$u_x + v_y = 0, \quad u_y - v_x = -2i\varphi'(z) + 2i\overline{\varphi'(z)}, \quad (3)$$

где $\varphi(z)$ — произвольная голоморфная функция комплексного переменного $z = x + iy$.

Записывая систему (3) в виде $w_z = \varphi'(z) - \overline{\varphi'(z)}$, $w = u - iv$, сразу приходим к известной формуле

$$w(z) = \overline{z}\varphi'(z) - \overline{\varphi(z)} + \psi(z), \quad (4)$$

где $\psi(z)$ — произвольная голоморфная функция (⁴).

В силу (1) и (4) имеем $p_x - ip_y = 2p_z = 4k^{-1}w_{z\bar{z}} = 4k^{-1}\varphi''(z)$, откуда следует, что $p(x, y) = 4k^{-1} \text{Re } \varphi'(z) + C$, где C — произвольная действительная постоянная.

Решение вида $w(z) \equiv 0$, $p(x, y) = \text{const}$ задачи (1), (2) будем называть тривиальным.

Пусть T представляет ограниченную область с гладким контуром S .

Если решение $u(x, y)$, $v(x, y) \in C^2(T \cup S)$, $p(x, y) \in C^1(T \cup S)$ системы (1) удовлетворяет краевым условиям

$$u(t) = v(t) = 0, \quad t \in S, \quad (5)$$

то, интегрируя очевидное тождество $(uu_x + vv_x - krp)_x + (uu_y + vv_y - krp)_y = u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2$ по области T , получим

$$\int (u_x^2 + u_y^2 + v_x^2 + v_y^2) dx dy = 0,$$

откуда, в свою очередь, заключаем, что однородная задача (1), (5) нетривиальных решений не имеет.

Единственность решения задачи (2), (4) имеет место и при $w \in C^{1,h}(T \cup S)$.

В случае, когда область T не ограничена, требование ограниченности функции $w(z)$, представимой в виде (4) и удовлетворяющей краевым условиям (5), вовсе не обязывает ее быть тождественным нулем. Так, например, при $4\varphi = z^2 - 2z$, $4\psi = -z^2 - 4$ из (4) получается функция $w(z) = y^2 - 1$, ограниченная в полосе $-1 \leq \text{Im } z \leq 1$ и обращающаяся в нуль

при $y = \pm 1$. Решение $u = y^2 - 1$, $v = 0$, $p = 2k^{-1}x + C$ задачи (1), (2) приведено в (2-4).

Когда область T представляет круг $|z| < 1$, решение задачи (2), (4) в предположении, что $w \in C^{0,h}(|z| \leq 1)$, $0 < h \leq 1$, дается формулой (12)

$$w = \frac{1 - z\bar{z}}{2\pi iz} \left[\frac{d}{dz} \int_S \overline{f(t)} \frac{dt}{t - z} - \int_S \overline{f(t)} \frac{dt}{t^2} \right] + \frac{1}{2\pi i} \int_S f(t) \frac{dt}{t - z} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_S \overline{f(t)} \frac{dt}{t - z} - \frac{1}{2\pi i} \int_S f(t) \frac{dt}{t}, \quad f = F_1 - iF_2.$$

Если T — односвязная область с контуром S , удовлетворяющим условию Ляпунова, то в результате конформного отображения $z = z(\xi)$ этой области на круг $|\xi| < 1$ функция w и краевые условия (2) принимают вид

$$w = \omega(\xi) \varphi[z(\xi)] + \overline{\varphi[z(\xi)]} + \psi[z(\xi)], \quad |\xi| < 1, \quad w = f[z(\xi)], \\ |\xi| = 1,$$

где $z'(\xi) \omega(\xi) = \overline{z(\xi)}$.

Следовательно, возвращаясь к прежним обозначениям, вопрос существования решения задачи (1), (2) можно считать редуцированным к отысканию голоморфных в круге $|z| < 1$ функций $\varphi(z) \in C^{1,h}(|z| \leq 1)$, $\psi(z) \in C^{0,h}(|z| \leq 1)$, удовлетворяющих на окружности $|t_0| = 1$ краевым условиям

$$\operatorname{Re}[\omega(t_0)\varphi'(t_0) - \varphi(t_0) + \psi(t_0)] = F_1(t_0), \\ \operatorname{Re} i[\omega(t_0)\varphi'(t_0) + \varphi(t_0) + \psi(t_0)] = F_2(t_0), \quad (6)$$

где $\omega(t_0)$, $F_1(t_0)$, $F_2(t_0) \in C^{1,h}$, причем без ограничения общности можно полагать, что

$$\operatorname{Re} \varphi(0) = \operatorname{Re} \psi(0). \quad (7)$$

Известно, что голоморфные в круге $|z| < 1$ функции $\varphi(z) \in C^{1,h}(|z| \leq 1)$, $\psi(z) \in C^{0,h}(|z| \leq 1)$, удовлетворяющие условиям (7), однозначно выражаются через действительные плотности $\mu_1(t) \in C^{1,h}(|t| = 1)$, $\mu_2(t) \in C^{0,h}(|t| = 1)$ по формулам

$$\varphi(z) = \frac{1}{\pi i} \int \log(1 - zt^{-1}) \mu_1(t) ds + \frac{1}{\pi i} \int \mu_1(t) ds + \operatorname{Re} \varphi(0), \\ \psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int \frac{\mu_2(t) t ds}{t - z} + \operatorname{Re} \varphi(0), \quad (8)$$

где интегралы берутся по окружности $|t| = 1$, а под $\log(1 - zt^{-1})$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z = 0$ (5).

На основании формул (8) краевая задача (6) редуцируется к системе сингулярных интегральных уравнений

$$A(t_0)\mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_S \frac{\mu(t) t}{t - t_0} + \frac{1}{2\pi i} \int_S C(t) \log\left(1 - \frac{t_0}{t}\right) \mu(t) dt + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_S D(t) \log\left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \mu(t) dt + \frac{1}{2\pi i} \int_S E(t_0, t) \mu(t) dt = f(t_0), \quad (9) \\ |t_0| = 1, \quad |t| = 1,$$

где

$$A(t) = \operatorname{Re} \left\| \begin{matrix} i\tau, & 0 \\ \tau, & -1 \end{matrix} \right\|, \quad B(t) = i \operatorname{Im} \left\| \begin{matrix} i\tau, & -i \\ \tau, & 0 \end{matrix} \right\|, \quad C(t) = \left\| \begin{matrix} i\bar{\tau}, & 0 \\ -\bar{\tau}, & 0 \end{matrix} \right\|, \\ D(t) = - \left\| \begin{matrix} i\bar{\tau}, & 0 \\ \bar{\tau}, & 0 \end{matrix} \right\|, \quad E(t_0, t) = \left\| \begin{matrix} -i\tau(t_0)\bar{\tau}, & i\bar{\tau} \\ -\tau(t_0)\bar{\tau} - 2, & -\bar{\tau} \end{matrix} \right\|, \\ \mu = (\mu_1, \mu_2), \quad f = (F_1, -F_2), \quad t\tau(t) = \omega(t),$$

а под $\log(1 - tz^{-1})$ понимается ветвь, обращающаяся в нуль при $z \rightarrow \infty$.

Так как $\det(A+B) = \det(A-B) = 0$, то к уравнению (9) неприменима известная теория сингулярных интегральных уравнений^(6,7). Однако наличие в левой части уравнения (9), наряду с сингулярным ядром Коши, и ядер с логарифмической особенностью позволяет легко преодолеть это затруднение.

В самом деле, в результате однозначно обратимых замен

$$\begin{aligned} v(t_0) &= a(t_0) \mu(t_0) + \int_S \frac{b(t_0, t)}{t-t_0} \mu(t) dt + \int_S b(t_0, t) t_0^{-1} \log \left(1 - \frac{t}{t_0}\right) \mu(t) dt, \\ \sigma(t_0) &= \overline{a(t_0)} v(t_0) + \int_S \frac{\overline{b(t_0, t)}}{t-t_0} v(t) dt + \int_S \overline{b(t_0, t)} t^{-1} \log \left(1 - \frac{t_0}{t}\right) v(t) dt \end{aligned}$$

уравнение (9) приводится к виду

$$\alpha(t_0) \sigma(t_0) + \frac{\beta(t_0)}{\pi i} \int_S \frac{\sigma(t) dt}{t-t_0} + \int_S K(t_0, t) \sigma(t) dt = g(t_0), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} 3 & \tau \\ -\tau^{-1} & 3 \end{matrix} \right\|, \quad b(t_0, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left\| \begin{matrix} 1 & \tau(t)^{-1} \\ \tau(t_0) & \tau(t_0) \tau(t)^{-1} \end{matrix} \right\|, \\ \alpha(t) &= \gamma(t) + \delta(t), \quad \beta(t) = \gamma(t) - \delta(t), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\gamma(t) = \frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} 2i\tau - i & -2i - i\tau^{-1} \\ 2\tau + 1 & -2 + \tau^{-1} \end{matrix} \right\|, \quad \delta(t) = \frac{1}{4} \left\| \begin{matrix} -2i\bar{\tau} - i & 2i - i\bar{\tau}^{-1} \\ 2\bar{\tau} - 1 & -2 - \bar{\tau}^{-1} \end{matrix} \right\|, \quad (12)$$

$g(t_0)$ — известная функция, которая выражается через $f(t_0)$, а $K(t_0, t)$ — регулярное ядро.

Так как в силу (11) и (12)

$$\det(\alpha + \beta) = \det(\alpha - \beta) = 4i, \quad (13)$$

то мы вправе пользоваться существующей теорией сингулярных интегральных уравнений^(6,7). В частности, из равенств (13) следует, что индекс системы (10) и, стало быть, индекс задачи (6)

$$\kappa = \frac{1}{2\pi} [\arg \det(\alpha - \beta) - \arg \det(\alpha + \beta)]_S = 0.$$

Отсюда на основании единственного решения задачи (2), (4) заключаем, что при принятых выше предположениях относительно гладкости данных, эта задача всегда имеет решение.

Идея использования присутствия в сингулярном интегральном уравнении ядра с логарифмической особенностью, при нарушении нормальности этого уравнения, была нами реализована еще в сороковых годах на конкретных примерах^(8,9); в дальнейшем она была развита в работах^(10,11).

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
2 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе, Теоретическая гидромеханика, ч. II, М., 1963. ² Р. Bhattacharyya, Bull. Calcutta Math. Soc., 54, 4 (1965). ³ K. S. Pandey, Bull. Calcutta Math. Soc., 61, 2 (1969). ⁴ S. I. Pai, Viscous Flow Theory, 1956. ⁵ И. Н. Векуа, Сообщ. АН ГрузССР, 2, 6 (1941). ⁶ Н. И. Мусхелишвили, Сингулярные интегральные уравнения, М., 1968. ⁷ И. П. Векуа, Система сингулярных интегральных уравнений, М., 1970. ⁸ А. В. Бицадзе, Сообщ. АН ГрузССР, 3, 5 (1952). ⁹ А. В. Бицадзе, Краевые задачи для эллиптических уравнений, М., 1966. ¹⁰ Н. Е. Товмасян, Дифференциальные уравнения, 3, 1 (1967). ¹¹ Р. С. Сакс, Там же, 6, 1 (1970). ¹² В. С. Виноградов, ДАН, 145, № 6 (1962).