

УДК 519.281.2+512.83

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Член-корреспондент АН СССР Л. А. ВАЙНШТЕЙН

ФИЛЬТРАЦИЯ ПОМЕХ ПРИ ЧИСЛЕННОМ РЕШЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

Как известно (^{1, 2}), точное решение интегрального уравнения

$$\int_a^b K(x, y) z(y) dy = u(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

возможно лишь для функций $u(x)$, удовлетворяющих весьма жестким условиям; если на такую функцию накладывается погрешность, то уравнение (1), вообще говоря, уже нельзя решить точно. Его приходится решать приближенно, привлекая (в силу случайного характера погрешностей) статистические соображения, по существу близкие к тем, которые применяются в теории выделения сигналов на фоне случайных помех (шумов). При переходе от $z(y)$ к $u(x)$ по формуле (1) помехи ослабляются (сглаживаются), поэтому при обратном переходе от $u(x)$ к $z(y)$, т. е. при решении уравнения (1) помехи, если их не учитывать и не отфильтровать, резко возрастают и могут полностью замаскировать искомую функцию $z(y)$. Необходимость статистического подхода и аналогия между помехами и погрешностями отмечалась в ряде работ (^{3, 4}), см. также обзор (⁵) и цитированную там литературу).

В данной заметке рассматривается оптимальный способ решения уравнения (1) при условии, что свойства функции $z(y)$ не конкретизируются: предполагается лишь, что она является плавной, т. е. мало изменяется на интервале между опорными точками (см. ниже).

Чтобы избежать излишних сложностей, рассмотрим вместо интегрального уравнения (1) конечную систему линейных уравнений

$$\sum_s K_{rs} z_s = u_r, \quad r, s = 0, 1, \dots, n. \quad (2)$$

Мы предполагаем, что функции $u(x)$, $z(y)$ и $K(x, y)$ являются достаточно плавными, в частности значения u_r и z_s в опорных точках хорошо передают ход $u(x)$ и $z(y)$ и мало различаются в соседних точках: только тогда возможен переход от (1) к (2). Вследствие плавности $K(x, y)$ квадратная матрица $\|K_{rs}\|$ плохо обусловлена. Будем считать, что

$$u_r = \bar{u}_r + \delta u_r, \quad (3)$$

где δu_r — погрешность с нулевым средним значением ($\overline{\delta u_r} = 0$) и известной корреляционной функцией $\overline{\delta u_r \delta u_{r'}}$; чертой обозначаем усреднение по помехе (погрешности δu_r), наложенной на неизвестные нам значения $\bar{u}_r$.

Представим элементы матрицы $\|K_{rs}\|$ в виде (ср. (²) и (⁶))

$$K_{rs} = \sum_j \sqrt{\mu_j} \psi_j^{(1)}(r) \psi_j^{(2)}(s), \quad (4)$$

где $\psi_j^{(1,2)}$ — ортонормальные функции дискретного аргумента,

$$\sum_r \psi_j^{(1)}(r) \psi_{j'}^{(1)}(r) = \sum_s \psi_j^{(2)}(s) \psi_{j'}^{(2)}(s) = \delta_{jj'}, \quad (5)$$

связанные с симметричными матрицами

$$K_{rr'}^{(1)} = \sum_s K_{rs} K_{r's} = \sum_j \mu_j \psi_j^{(1)}(r) \psi_j^{(1)}(r'), \quad (6)$$

$$K_{ss'}^{(2)} = \sum_r K_{rs} K_{r's'} = \sum_j \mu_j \psi_j^{(2)}(s) \psi_j^{(2)}(s');$$

при этом

$$\sum_{r'} K_{rr'}^{(1)} \psi_j^{(1)}(r') = \mu_j \psi_j^{(1)}(r), \quad \sum_{s'} K_{ss'}^{(2)} \psi_j^{(2)}(s') = \mu_j \psi_j^{(2)}(s), \quad (7)$$

$$\mu_j = \sum_s \left[\sum_r K_{rs} \psi_j^{(1)}(r) \right]^2 = \sum_r \left[\sum_s K_{rs} \psi_j^{(2)}(s) \right]^2 \geq 0.$$

Используя выражение (4) и вводя обозначения

$$\sum_s z_s \psi_j^{(2)}(s) = b_j, \quad \sum_r u_r \psi_j^{(1)}(r) = c_j, \quad (8)$$

мы, пользуясь ортонормальностью $\psi_j^{(1)}$, приходим к уравнениям

$$\sqrt{\mu_j} b_j = c_j, \quad j = 0, 1, \dots, n, \quad (9)$$

причем коэффициенты b_j и c_j позволяют записать z_s и u_r в виде

$$z_s = \sum_j b_j \psi_j^{(2)}(s), \quad u_r = \sum_j c_j \psi_j^{(1)}(r). \quad (10)$$

Если к тому же положить $b_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} c_j$, то первое разложение (10) даст нам точное решение системы (2); оно является формальным, поскольку слагаемые, соответствующие малым μ_j , имеют слишком большой вес: небольшие погрешности в c_j и $\psi_j^{(2)}$ приводят к значительным погрешностям в z_s . Наличие (наряду с конечными) малых μ_j вытекает из того, что матрицы $\|K_{rs}\|$, $\|K_{rr'}^{(1)}\|$ и $\|K_{ss'}^{(2)}\|$ плохо обусловлены; малые μ_j обычно соответствуют быстро осциллирующим функциям $\psi_j^{(1,2)}$, присутствие которых в разложениях (10) противоречит исходному предположению о плавности $u(x)$ и $z(y)$.

Учет помех и их отфильтровывание позволяет получить эффективное решение поставленной задачи. Это решение имеет вид

$$\hat{z}_s = \sum_j \frac{c_j}{\sqrt{\mu_j} (1 + \tau_j)} \psi_j^{(2)}(s), \quad \hat{u}_r = \sum_j \frac{c_j}{1 + \tau_j} \psi_j^{(1)}(r), \quad (11)$$

где коэффициенты c_j по-прежнему определяются формулой (8), а

$$\tau_j = \overline{\delta c_j^2} / \bar{c}_j^2 \quad (12)$$

можно назвать отношением шума / сигнал в j -м канале обработки — в j -м слагаемом разложений (10); при этом

$$\bar{c}_j = \sum_r \bar{u}_r \psi_j^{(1)}(r), \quad \overline{\delta c_j^2} = \sum_{r, r'} \overline{\delta u_r \delta u_{r'}} \psi_j^{(1)}(r) \psi_j^{(1)}(r'), \quad (12')$$

так что числитель формулы (12) нам обычно известен, а знаменатель — нет.

Первая формула (11) получится, если мы будем искать решение каждого уравнения (9) в виде

$$\hat{b}_j = \lambda_j c_j, \quad (13)$$

выбирая λ_j так, чтобы (в духе теории оптимальных линейных фильтров (7)) минимизировать среднюю квадратичную ошибку

$$\overline{(\hat{b}_j - \bar{b}_j)^2} = (\lambda_j - 1/\sqrt{\mu_j})^2 \bar{c}_j^2 + \lambda_j^2 \overline{\delta c_j^2}, \quad (14)$$

где $\bar{b}_j = \frac{1}{\sqrt{\mu_j}} \bar{c}_j$ — точные значения b_j при отсутствии помех. Минимальное значение (14), равное

$$E_j = \overline{\delta c_j^2} / (\mu_j (1 + \tau_j)), \quad (15)$$

получается при

$$\lambda_j = 1 / (\sqrt{\mu_j} (1 + \tau_j)), \quad (16)$$

что и приводит нас к первой формуле (11), которая, таким образом, обеспечивает минимум средней квадратичной ошибки

$$E = \sum_s \overline{(\hat{z}_s - \bar{z}_s)^2} = \sum_j \overline{(\hat{b}_j - \bar{b}_j)^2}, \quad (17)$$

равный $\sum E_j$, и в этом смысле является оптимальной.

Имеем

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 1 / \sqrt{\mu_j}, & E_j &= \overline{\delta c_j^2} / \mu_j & \text{при } \tau_j \ll 1, \\ \lambda_j &= 0, & E_j &= \bar{c}_j^2 / \mu_j & \text{при } \tau_j \gg 1, \end{aligned} \quad (18)$$

причем в первом случае ошибка E_j обусловлена прохождением помехи по j -му каналу, функционирующему как и при отсутствии помех, а во втором случае — отсутствием сигнала в j -м канале, выключенном из-за перегрузки помехами; информация, передаваемая по такому каналу, безвозвратно теряется. Ниже мы увидим, что полное выключение канала происходит уже при $|c_j| < 2\sqrt{\overline{\delta c_j^2}}$.

Подобные выражения получались и ранее (см., например, (5, 7)), однако здесь мы каких-либо количественных предположений о сигнале не делаем. Обычно можно считать, что помеха есть «белый шум»,

$$\overline{\delta u_r \delta u_{r'}} = \sigma^2 \delta_{rr'}, \quad \overline{\delta c_j^2} = \sigma^2; \quad (19)$$

тогда все $\overline{\delta c_j^2}$ одинаковы, в то время как $\bar{c}_j$ и λ_j при переходе к малым μ_j и жении (11) для z_s остается сравнительно небольшое число членов: так быстро осциллирующим функциям $\psi^{(1,2)}$ быстро убывают. Поэтому в разлагаются помехи, вызываемые неточностью исходных данных. Одновременно уменьшаются помехи, обусловленные погрешностями вычислений.

Такой же смысл имеет и вторая формула (11): величины u_r более близки к точным значениям $\bar{u}_r$, чем исходные значения (3); а именно, средняя квадратичная ошибка

$$E^0 = \sum_r \overline{(\hat{u}_r - \bar{u}_r)^2} = \sum_j \overline{(\hat{c}_j - \bar{c}_j)^2} \quad (20)$$

минимальна, если взять

$$c_j = \bar{c}_j / (1 + \tau_j). \quad (21)$$

Неизвестное значение $\bar{c}_j$ в выражении (12) для τ_j допустимо заменять на c_j только при $\tau_j \ll 1$, в общем же случае следует вместо $\bar{c}_j$ взять $\hat{c}_j$, как наиболее близкое к нему значение. Тогда формула (21) принимает вид

$$\hat{c}_j = c_j w(t_j), \quad t_j = \overline{\delta c_j^2} / c_j^2, \quad (22)$$

где весовая функция

$$w(t) = 1/2 + \sqrt{1/4 - t} \quad \text{при } 0 \leq t \leq 1/4, \quad w(t) = 0 \quad \text{при } t > 1/4. \quad (23)$$

По формуле (22) мы можем получить $\hat{c}_j \neq 0$ при $\bar{c}_j = 0$ и нормально распределенной помехе δc_j лишь с вероятностью 0,0455.

Если в системе (2) взять $K_{rs} = \delta_{rs}$, то мы приходим к более простой задаче о восстановлении истинных значений $\bar{u}_r$ функции $u(x)$ по известным значениям (3), т. е. к задаче о сглаживании погрешностей δu_r . В этой задаче все $\mu_j = 1$, а $\psi_j^{(1)} = \psi_j^{(2)} = P_j$, где $P_j(r)$ — любая система ортонормальных функций в смысле формулы (5); в частности, можно использовать полиномы Чебышева⁽⁸⁾. Значения $\hat{u}_r$, минимизирующие среднюю квадратичную ошибку (20), определяются формулой

$$\hat{u}_r = \sum_j c_j w(t_j) P_j(r), \quad c_j = \sum_r u_r P_j(r). \quad (24)$$

Суммирование по j включает фактически лишь те слагаемые, у которых $t_j \leq 1/4$. Обычно число слагаемых в выражении для $\hat{u}_r$ ограничивают из иных соображений — более сложных, менее естественных и кроме того не свободных от произвола. Простая формула (24) является важным побочным результатом данной работы.

При решении плохо обусловленной системы (2) приходится одновременно сглаживать погрешности у функций u и z так, чтобы восстановленные значения $\hat{u}_r$ и $\hat{z}_s$ точно удовлетворяли системе (2). В этом случае, как мы видели, следует применять функции $\psi_j^{(1,2)}$, связанные с матрицей $\|K_{rs}\|$.

Автор выражает благодарность Е. Л. Косареву за ценное обсуждение работы.

Институт физических проблем
Академии наук СССР
Москва

Поступило
9 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, 1, М.—Л., 1933, стр. 147. ² Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, ИЛ, 1960, стр. 185. ³ В. Н. Судаков, Л. А. Халфин, ДАН, 157, № 5, 1058 (1964). ⁴ М. М. Лаврентьев, В. Г. Васильев, Сибирск. матем. журн., 7, № 3, 559 (1966). ⁵ В. Ф. Турчин, В. П. Козлов, М. С. Малкевич, УФН, 102, № 3, 345 (1970). ⁶ Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1, № 3, 412 (1961). ⁷ Л. А. Вайнштейн, В. Д. Зубаков, Выделение сигналов на фоне случайных помех, М., 1960, § 2. ⁸ Л. П. Грабарь, Табл. полиномов Чебышева, ортонормированных на системе равноотстоящих точек, 1965.