Н. Н. Воробьев, А. Н. Скиба, О дистрибутивности решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, *Матем. заметки*, 2000, том 67, выпуск 5, 662–673

Математические заметки

том 67 выпуск 5 май 2000

УДК 512.542

О ДИСТРИБУТИВНОСТИ РЕШЕТКИ РАЗРЕШИМЫХ ТОТАЛЬНО ЛОКАЛЬНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА

Н. Н. Воробьёв, А. Н. Скиба

Доказано, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является алгебраической дистрибутивной решеткой.

Библиография: 17 названий.

Все рассматриваемые группы конечны. Напомним, что функции вида $f\colon \mathbb{P} \mapsto \{$формации$\}$ называются *формационными функциями* [1] или, иначе, *спутниками* [2]. Если класс групп $\mathfrak{F}$ таков, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \Big(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} \mathfrak{G}_{p'} \mathfrak{N}_p f(p) \Big),$$

где f – некоторый спутник, то говорят, что $\mathfrak{F}$ – локальная формация со спутником f и пишут $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}(f)$. Здесь $\pi(\mathfrak{F})$ – множество всех простых делителей порядков групп из $\mathfrak{F}$, символы $\mathfrak{N}_p$ и $\mathfrak{G}_{p'}$ обозначают класс всех p-групп и класс всех p'-групп соответственно.

Функции вида $f\colon \mathbb{P} \mapsto \{$классы Фиттинга$\}$ называются *функциями Хартли* или, более коротко, *H-функциями* [2]. Если для класса групп $\mathfrak{F}$ имеет место

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \Big(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'} \Big),$$

где f – некоторая H-функция, то говорят, что $\mathfrak{F}$ – локальный класс Фиттинга с H-функцией f и пишут $\mathfrak{F} = \mathrm{LR}(f)$.

При обозрении большинства наиболее известных конкретных классов групп легко обнаруживается, что они могут быть заданы при помощи функций, все непустые значения которых сами являются локальными классами. Последнее обстоятельство привело к возникновению следующей естественной конструкции [3]: всякая формация считается 0-кратно локальной; а при $n \geqslant 1$ формация $\mathfrak{F}$ называется *n-кратно локальной*, если $\mathfrak{F} = \mathrm{LF}(f)$, где все непустые значения спутника f $(n-1)$-кратно локальны. Формация называется *тотально локальной*, если она n-кратно локальна для всех натуральных n. Аналогично определяются n-кратно локальные и тотально локальные классы Фиттинга. Нетрудно показать, что класс разрешимых тотально локальных формаций совпадает с классом так называемых примитивных насыщенных формаций, введенным Хоуксом в работе [4]. Кратно локальные классы нашли приложения при решении многих вопросов теории классов (см., например, [5]–[10]).

Являясь предельным случаем n-кратно локальных классов, тотально локальные классы обладают рядом специфических свойств. Отметим, в частности, что при любом целом неотрицательном n решетки всех n-кратно локальных формаций, n-кратно локальных наследственных формаций, n-кратно локальных нормально наследственных формаций и т.д. являются модулярными, но все они не дистрибутивны даже в классе разрешимых групп $\mathfrak{S}$ (см. [5, гл. 2] и [6, гл. 4]). Что же касается тотально локальных формаций, то в настоящее время неизвестно, является ли хотя бы модулярной решетка всех тотально локальных τ-замкнутых формаций хотя бы для одного нетривиального подгруппового функтора τ [6, вопрос 4.2.14]. В то же время в монографии [5] анонсирован результат о том, что решетка всех разрешимых тотально локальных формаций дистрибутивна. В данной работе мы доказываем, что решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является алгебраической и дистрибутивной и такой, в которой любой элемент, отличный от (1) и $\mathfrak{S}$, не дополняем. В ходе получения такого результата мы выявляем ряд общих свойств оператора порождения $\vee^{\infty}$. С другой стороны, в качестве одного из следствий мы даем здесь полное доказательство дистрибутивности решетки всех разрешимых тотально локальных формаций, другая схема которого обсуждалась в монографии [6].

Напомним некоторые определения [2], связанные с локальными классами Фиттинга. Символом $F^p(G)$ обозначают подгруппу $O^p(O^{p'}(G))$. Символом l^{∞} обозначается решетка всех тотально локальных классов Фиттинга. H-Функция f называется *l^{∞}-значной* [6], если каждое ее непустое значение принадлежит решетке l^{∞}. Пусть $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ – произвольный набор l^{∞}-значных H-функций. Для всякого $p \in \mathbb{P}$ положим $\left(\bigcap_{i\in I} f_i\right)(p) = \bigcap_{i\in I} f_i(p)$. H-Функция $\bigcap_{i\in I} f_i$ называется *пересечением* H-функций f_i. Если класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ обладает по крайней мере одной l^{∞}-значной H-функцией, то пересечение всех таких H-функций класса $\mathfrak{F}$ называется *минимальной l^{∞}-значной H-функцией* класса $\mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{X}$ – произвольная непустая совокупность групп. Пересечение всех тотально локальных классов Фиттинга, содержащих $\mathfrak{X}$, обозначают через $l^{\infty}\operatorname{fit}\mathfrak{X}$ и называют *тотально локальным классом Фиттинга*, порожденным $\mathfrak{X}$ [2]. Если $\mathfrak{X} = \{G\}$, то вместо $l^{\infty}\operatorname{fit}\{G\}$ пишут $l^{\infty}\operatorname{fit} G$. Всякий класс Фиттинга такого вида называется *однопорожденным тотально локальным классом Фиттинга* [2].

Нам потребуется следующий частный случай леммы 21 работы [2].

Лемма 1. *Если $\mathfrak{F} = l^{\infty}\operatorname{fit}\mathfrak{X}$ и f – минимальная l^{∞}-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, то*

$$f(p) = l^{\infty}\operatorname{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$$

при всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $f(p) = \varnothing$ при всех $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$.

Доказательство. Пусть t – H-функция такая, что $t(p) = l^{\infty}\operatorname{fit}(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X})$ при всех $p \in \pi(\mathfrak{X})$ и $t(p) = \varnothing$ при всех $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(\mathfrak{X})$. Покажем, что $t = f$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{LR}(t)$. Тогда, очевидно, $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Пусть f_1 – произвольная l^{∞}-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$. Тогда поскольку $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{F}$, для любого $p \in \mathbb{P}$ имеет место $(F^p(G) \mid G \in \mathfrak{X}) \subseteq f_1(p)$. Значит, $t(p) \subseteq f_1(p)$. Поэтому $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Следовательно, $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $t = f$. Лемма доказана.

Пусть $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – произвольный набор классов Фиттинга из l^∞. Тогда через $\vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$ обозначается [6] верхняя грань для $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ в l^∞, а через $\vee^\infty(f_i \mid i \in I)$ – H-функция f такая, что $f(p)$ является верхней гранью для $\{f_i(p) \mid i \in I\}$ в l^∞, если $\bigcup_{i\in I} f_i(p) \neq \varnothing$, и $f(p) = \varnothing$ в противном случае.

Лемма 2. *Пусть f_i – минимальная l^∞-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$. Тогда $\vee^\infty(f_i \mid i \in I)$ – минимальная l^∞-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F} = \vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$.*

Доказательство. Пусть $\pi = \pi\big(\bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\big) = \bigcup_{i\in I}\pi(\mathfrak{F}_i) = \pi(\mathfrak{F})$, $f = \vee^\infty(f_i \mid i \in I)$ и h – минимальная l^∞-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Покажем, что $h = f$.

Пусть $p \in \mathbb{P} \setminus \pi$. Тогда для любого $i \in I$ имеет место $h(p) = \varnothing$ и $f_i(p) = \varnothing$. Значит, $f(p) = \varnothing$.

Пусть $p \in \pi$. Тогда найдется $i \in I$ такое, что $f_i(p) \neq \varnothing$. По лемме 1 имеет место

$$\begin{aligned} h(p) &= l^\infty \operatorname{fit}\Big(\Big(F^p(G) \mid G \in \bigcup_{i\in I}\mathfrak{F}_i\Big)\Big) = l^\infty \operatorname{fit}\Big(\Big(\bigcup_{i\in I} l^\infty \operatorname{fit}((F^p(G) \mid G \in \mathfrak{F}_i))\Big)\Big) \\ &= l^\infty \operatorname{fit}\Big(\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big)\Big) = \big((\vee^\infty(f_i \mid i \in I))\big)(p) = f(p). \end{aligned}$$

Лемма доказана.

H-Функция f называется *внутренней*, если $f(p) \subseteq \mathrm{LR}(f)$ для всех $p \in \mathbb{P}$. В дальнейшем нам будет необходима следующая лемма, являющаяся частным случаем результата, полученного Н. Т. Воробьевым [11].

Лемма 3. *Для любого тотально локального класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ класс $\mathfrak{H}\mathfrak{N}_p$ тотально локален.*

Лемма 4 [2, лемма 23]. *Пусть $\mathfrak{F} = \mathrm{LR}(f)$. Тогда если $O^p(G) \in f(p) \cap \mathfrak{F}$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Со всяким классом Фиттинга можно сопоставить наименьший (по включению) класс Фиттинга $\mathfrak{F}^*$ [12], содержащий $\mathfrak{F}$ и такой, что для любых групп G и H справедливо равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^*} = G_{\mathfrak{F}^*} \times H_{\mathfrak{F}^*}$. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта*, если $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$.

Лемма 5. *Если $\{\mathfrak{F}_i = \mathrm{LR}(f_i) \mid i \in I\}$ – набор тотально локальных классов Фиттинга, где f_i – некоторая внутренняя l^∞-значная H-функция, то*

$$\vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I) = \mathrm{LR}(\vee^\infty(f_i \mid i \in I)).$$

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, $\mathfrak{M} = \mathrm{LR}(\vee^\infty(f_i \mid i \in I))$ и h_i – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_i$. Тогда по лемме 2 $h = \vee^\infty(h_i \mid i \in I)$ – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$. Поскольку $h_i \leqslant f_i$, для всех $p \in \mathbb{P}$ имеет место включение

$$l^\infty \operatorname{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} h_i(p)\Big) \subseteq l^\infty \operatorname{fit}\Big(\bigcup_{i\in I} f_i(p)\Big).$$

Отсюда $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$.

Докажем теперь обратное включение. Пусть t_i – H-функция класса $\mathfrak{F}_i$ такая, что $t_i(p) = h_i(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$. Ввиду леммы 3 эта H-функция l^∞-значна. Покажем, что $f_i \leqslant t_i$.

Допустим, что $f_i \nleqslant t_i$. Тогда найдется простое число p такое, что $f_i(p) \nsubseteq t_i(p)$. Пусть G – группа из $f_i(p) \setminus t_i(p)$. Пусть $\Gamma = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где Z_p – группа порядка p, K – база регулярного сплетения Γ. Поскольку каждый локальный класс Фиттинга является классом Локетта [13] и $G \notin t_i(p)$, согласно [1, гл. X, утверждение 2.1 a)] $\Gamma_{t_i(p)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $\Gamma_1 = G_{t_i(p)} \wr Z_p$. Ввиду свойств сплетений (см., например, [1, гл. A, 18.2 d)])

$$\Gamma/\Gamma_{t_i(p)} = \Gamma/K_1 \simeq (G/G_{t_i(p)}) \wr Z_p.$$

Следовательно, p делит порядок $\Gamma/\Gamma_{t_i(p)}$.

Так как $G \in f_i(p)$, то $K \in f_i(p)$. Поэтому $K \subseteq \Gamma_{f_i(p)}$. Поскольку $\Gamma/K \simeq Z_p \in \mathfrak{N}_p$, то

$$\Gamma/K/\Gamma_{f_i(p)}/K \simeq \Gamma/\Gamma_{f_i(p)} \in \mathfrak{N}_p.$$

Значит, по лемме 4 $\Gamma \in f_i(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}_i = \mathrm{LR}(f_i) = \mathrm{LR}(t_i)$ и поэтому

$$\Gamma \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \Big(\bigcap_{q \in \pi(\mathfrak{F})} t_i(q)\mathfrak{G}_{q'} \Big)$$

и, в частности, $\Gamma \in t_i(p)\mathfrak{G}_{p'}$ для всех $p \in \pi(\mathfrak{F})$. Следовательно, $\Gamma/\Gamma_{t_i(p)} \in \mathfrak{G}_{p'}$. Противоречие.

Итак, $f_i \leqslant t_i$. Значит, $f = \vee^\infty(f_i \mid i \in I) \leqslant \vee^\infty(t_i \mid i \in I)$, т.е. для любого $p \in \mathbb{P}$ имеет место включение

$$f(p) = \vee^\infty(f_i(p) \mid i \in I) \subseteq \vee^\infty(t_i(p) \mid i \in I) = \vee^\infty(h_i(p)\mathfrak{N}_p \mid i \in I).$$

Поскольку $h_i(p)\mathfrak{N}_p \subseteq (\vee^\infty(h_i(p) \mid i \in I))\mathfrak{N}_p$, то

$$l^\infty \operatorname{fit}\Big(\bigcup_{i \in I} h_i(p)\mathfrak{N}_p\Big) \subseteq l^\infty \operatorname{fit}(\vee^\infty(h_i(p) \mid i \in I)\mathfrak{N}_p) = (\vee^\infty(h_i(p) \mid i \in I))\mathfrak{N}_p$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. Но $\mathfrak{F} = \mathrm{LR}(t)$, где t – l^∞-значная H-функция такая, что

$$t(p) = (\vee^\infty(h_i(p) \mid i \in I))\mathfrak{N}_p$$

для всех $p \in \mathbb{P}$. Следовательно, $f \leqslant t$. Значит, $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Пусть $A \in \mathfrak{S} \cap \omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m)$, где $\omega(x_1, \dots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$, $\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m$ – некоторые разрешимые тотально локальные классы Фиттинга. Тогда найдутся группы $A_1, \dots, A_m$ $(A_i \in \mathfrak{F}_i)$ такие, что*

$$A \in \omega(l^\infty \operatorname{fit} A_1, \dots, l^\infty \operatorname{fit} A_m).$$

Доказательство. Индукцией по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee^\infty\}$ в терм ω покажем, что найдутся группы $A_i \in \mathfrak{F}_i$ $(i = 1, \dots, m)$ такие, что

$$A \in \omega(l^\infty \operatorname{fit} A_1, \dots, l^\infty \operatorname{fit} A_m).$$

При $r = 0$, очевидно, $A \in l^\infty \operatorname{fit} A$. Индукцией по нильпотентной длине группы A докажем, что утверждение верно при $r = 1$.

Пусть $A \in \mathfrak{F}_1 \vee^\infty \mathfrak{F}_2 = l^\infty \operatorname{fit}(\mathfrak{F}_1 \cup \mathfrak{F}_2)$ и $\pi(A) = \{p_1, \dots, p_k\}$. При $l(A) = 1$ имеет место $A = P_1 \times \dots \times P_k$, где P_i – силовская p_i-подгруппа группы A. Ясно, что $\pi(A) \subseteq \pi(\mathfrak{F}_1) \cup \pi(\mathfrak{F}_2)$. Пусть $p_1, \dots, p_j \in \pi(\mathfrak{F}_1)$, $p_{j+1}, \dots, p_k \in \pi(\mathfrak{F}_2)$. Тогда $A_1 = P_1 \times \dots \times P_j \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 = P_{j+1} \times \dots \times P_k \in \mathfrak{F}_2$. Понятно, что

$$A = A_1 \times A_2 \in (l^\infty \operatorname{fit} A_1) \vee^\infty (l^\infty \operatorname{fit} A_2).$$

Пусть теперь $l(A) > 1$. Допустим, что для всех разрешимых групп, нильпотентная длина которых меньше нильпотентной длины группы A, доказываемое нами утверждение верно. Ввиду лемм 1 и 2 для произвольного $p_i \in \pi(A)$ имеет место

$$F^{p_i}(A) \in f_1(p_i) \vee^\infty f_2(p_i) = (l^\infty \operatorname{fit}(F^{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_1)) \vee^\infty (l^\infty \operatorname{fit}(F^{p_i}(G) \mid G \in \mathfrak{F}_2)),$$

где f_j – минимальная l^∞-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_j$, $j = 1, 2$. Поскольку $l(F^{p_i}(A)) < l(A)$, по индукции найдутся группы $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, $A_{i_2} \in f_2(p_i)$ такие, что

$$F^{p_i}(A) \in (l^\infty \operatorname{fit} A_{i_1}) \vee^\infty (l^\infty \operatorname{fit} A_{i_2}).$$

Пусть $B_{i_1} = A_{i_1} \wr Z_{p_i}$, $B_{i_2} = A_{i_2} \wr Z_{p_i}$, где Z_{p_i} – циклическая группа порядка p_i, K – база регулярного сплетения B_{i_1}. Так как $A_{i_1} \in f_1(p_i)$, по лемме 4 имеет место $B_{i_1} \in f_1(p_i)\mathfrak{N}_{p_i} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Аналогично, $B_{i_2} \in \mathfrak{F}_2$.

Отсюда $A_1 = B_{1_1} \times \dots \times B_{t_1} \in \mathfrak{F}_1$, $A_2 = B_{1_2} \times \dots \times B_{t_2} \in \mathfrak{F}_2$. Покажем, что

$$A \in \mathfrak{F} = (l^\infty \operatorname{fit} A_1) \vee^\infty (l^\infty \operatorname{fit} A_2).$$

Пусть h – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$ и f – l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$ такая, что $f(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Пусть $i \in \{1, \dots, t\}$. Покажем, что $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$. Сначала установим, что $A_{i_1}, A_{i_2} \in f(p_i)$. Допустим, что $A_{i_1} \notin f(p_i)$. Тогда поскольку $f(p_i)$ – класс Локетта [13], согласно [1, гл. X, свойство 2.1 a)] $(B_{i_1})_{f(p_i)} = K_1$, где K_1 – база регулярного сплетения $(A_{i_1})_{f(p_i)} \wr Z_{p_i}$. Ввиду свойств сплетений (см., например, [1, гл. A, 18.2 d)])

$$B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)} = B_{i_1}/K_1 \simeq (A_{i_1}/(A_{i_1})_{f(p_i)}) \wr Z_{p_i}.$$

Значит, p_i делит порядок $B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)}$.

С другой стороны, так как $B_{i_1} \in \mathfrak{F}$, то

$$B_{i_1} \in \mathfrak{G}_{\pi(\mathfrak{F})} \cap \Big(\bigcap_{p \in \pi(\mathfrak{F})} f(p)\mathfrak{G}_{p'} \Big)$$

и, в частности, $B_{i_1} \in f(p_i)\mathfrak{G}_{p'_i}$. Следовательно, $B_{i_1}/(B_{i_1})_{f(p_i)} \in \mathfrak{G}_{p'_i}$. Противоречие. Значит, $A_{i_1} \in f(p_i)$. Аналогично, $A_{i_2} \in f(p_i)$. Поэтому $l^\infty \operatorname{fit}(A_{i_1}, A_{i_2}) \subseteq f(p_i)$. Очевидно, $l^\infty \operatorname{fit}(A_{i_1}, A_{i_2}) = (l^\infty \operatorname{fit} A_{i_1}) \vee^\infty (l^\infty \operatorname{fit} A_{i_2})$. Следовательно, $F^{p_i}(A) \in f(p_i)$.

Если же $A \in \mathfrak{F}_1 \wedge^\infty \mathfrak{F}_2 = \mathfrak{F}_1 \cap \mathfrak{F}_2$, то $A \in (l^\infty \operatorname{fit} A) \wedge^\infty (l^\infty \operatorname{fit} A)$. Таким образом, мы завершили доказательство теоремы при $r = 1$.

Пусть терм ω имеет $r > 1$ вхождений символов из $\{\cap, \vee^\infty\}$, и для термов с меньшим числом вхождений лемма верна. Пусть ω имеет вид

$$\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a})\Delta\omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee^\infty\}$ и $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$.

Через $\mathfrak{H}_1$ обозначим класс Фиттинга $\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$, через $\mathfrak{H}_2$ – класс Фиттинга $\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Тогда по доказанному выше найдутся группы $A_1 \in \mathfrak{H}_1$, $A_2 \in \mathfrak{H}_2$ такие, что $A \in l^\infty \operatorname{fit} A_1 \Delta l^\infty \operatorname{fit} A_2$. Поскольку число операций в терме ω_1 меньше r, по индукции найдутся группы $B_1 \in \mathfrak{F}_{i_1}, \dots, B_a \in \mathfrak{F}_{i_a}$ такие, что

$$A_1 \in \omega_1(l^\infty \operatorname{fit} B_1, \dots, l^\infty \operatorname{fit} B_a).$$

Аналогично, найдутся группы $C_1 \in \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, C_b \in \mathfrak{F}_{j_b}$ такие, что

$$A_2 \in \omega_2(l^\infty \operatorname{fit} C_1, \dots, l^\infty \operatorname{fit} C_b).$$

Пусть $x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a} \in \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\}$ и, вместе с тем, $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_t}\} \cap \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \varnothing$. Пусть

$$D_{i_k} = \begin{cases} B_k, & \text{если } k < t+1, \\ B_k \times C_q, & \text{где } x_{i_k} = x_{j_q} \text{ для некоторого } q \in \{1, \dots, b\} \text{ при } k \geqslant t+1. \end{cases}$$

Пусть $D_{j_k} = C_k$, если $x_{j_k} \notin \{x_{i_{t+1}}, \dots, x_{i_a}\}$. Через $\mathfrak{M}_p$ обозначим класс $l^\infty \operatorname{fit} D_{i_p}$, где $p = 1, \dots, a$; через $\mathfrak{X}_c$ – класс $l^\infty \operatorname{fit} D_{j_c}$, где $c = 1, \dots, b$.

Итак,

$$\begin{aligned} A_1 &\in \omega_1(l^\infty \operatorname{fit} B_1, \dots, l^\infty \operatorname{fit} B_a) \subseteq \omega_1(l^\infty \operatorname{fit} D_{i_1}, \dots, l^\infty \operatorname{fit} D_{i_a}) = \omega_1(\mathfrak{M}_1, \dots, \mathfrak{M}_a), \\ A_2 &\in \omega_2(l^\infty \operatorname{fit} C_1, \dots, l^\infty \operatorname{fit} C_b) \subseteq \omega_2(l^\infty \operatorname{fit} D_{j_1}, \dots, l^\infty \operatorname{fit} D_{j_b}) = \omega_2(\mathfrak{X}_1, \dots, \mathfrak{X}_b). \end{aligned}$$

Значит, найдутся классы Фиттинга $\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_m$ такие, что

$$A \in \omega_1(\mathfrak{K}_{i_1}, \dots, \mathfrak{K}_{i_a})\Delta\omega_2(\mathfrak{K}_{j_1}, \dots, \mathfrak{K}_{j_b}) = \omega(\mathfrak{K}_1, \dots, \mathfrak{K}_m),$$

где $\mathfrak{K}_i = l^\infty \operatorname{fit} K_i$, $K_i \in \mathfrak{F}_i$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Пусть $\omega(x_1, \dots, x_m)$ – терм сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$, f_i – внутренняя l^∞-значная H-функция класса Фиттинга $\mathfrak{F}_i$, $i = 1, \dots, m$. Тогда*

$$\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) = \mathrm{LR}(\omega(f_1, \dots, f_m)).$$

Доказательство. Проведем индукцию по числу r вхождений символов из $\{\cap, \vee^\infty\}$ в терм ω. Пусть

$$\omega(x_1, \dots, x_m) = \omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a})\Delta\omega_2(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}),$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee^\infty\}$ и $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} \cup \{x_{j_1}, \dots, x_{j_b}\} = \{x_1, \dots, x_m\}$. Допустим, что для термов ω_1 и ω_2 лемма верна. Тогда

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \mathrm{LR}(\omega_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \qquad \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathrm{LR}(\omega_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Понятно, что $\omega_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})$ и $\omega_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})$ – внутренние l^∞-значные H-функции классов Фиттинга $\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})$ и $\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$ соответственно. Значит, по индукции

$$\begin{aligned}\omega(\mathfrak{F}_1, \dots, \mathfrak{F}_m) &= \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a})\Delta\omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) \\ &= \mathrm{LR}(\omega_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})\Delta\omega_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})) = \mathrm{LR}(\omega(f_1, \dots, f_m)),\end{aligned}$$

где $\Delta \in \{\cap, \vee^\infty\}$. Лемма доказана.

Элемент c полной решетки L называется *компактным*, если для любого подмножества $X \subseteq L$ из неравенства $c \leqslant \sup_L X$ вытекает существование конечного подмножества $X_0 \subseteq X$ такого, что $c \leqslant \sup_L X_0$.

Лемма 8. *Пусть $\mathfrak{F} = l^\infty \operatorname{fit} G$, где группа G разрешима. Тогда $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в решетке l^∞.*

Доказательство. Индукцией по нильпотентной длине группы G покажем, что $\mathfrak{F}$ является компактным элементом в l^∞. Пусть $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} = \vee^\infty(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, где $\mathfrak{F}_i$ – тотально локальный класс Фиттинга.

Если $l(G) = 1$, то $G = P_1 \times \dots \times P_k$, где P_i – силовская p_i-подгруппа группы G. Значит, найдутся индексы $j_1, \dots, j_k \in I$ такие, что $p_i \in \pi(\mathfrak{F}_{j_i})$, т.е. $P_i \in \mathfrak{F}_{j_i}$. Поэтому $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \dots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}$. Следовательно, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \dots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}$.

Пусть $l(G) > 1$ и все тотально локальные классы Фиттинга вида $l^\infty \operatorname{fit} A$, где A – разрешимая группа и $l(A) < l(G)$, являются компактными элементами в решетке l^∞. Пусть f_i – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_i$, f – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$ и m – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{M}$. Тогда по лемме 1 $f(p) = l^\infty \operatorname{fit}(F^p(G))$ при всех $p \in \pi(G)$ и $f(p) = \varnothing$ при всех $p \in \mathbb{P} \setminus \pi(G)$. Кроме того, из леммы 1 вытекает, что $f \leqslant m$. Согласно лемме 2 $m = \vee^\infty(f_i \mid i \in I)$. Поскольку $l(F^p(G)) < l(G)$, по индукции для каждого $p \in \pi(G)$ найдутся индексы $i_1, \dots, i_t \in I$ такие, что

$$F^p(G) \in f_{i_1}(p) \vee^\infty \dots \vee^\infty f_{i_t}(p).$$

Поскольку $|\pi(G)| < \infty$, из последнего вытекает, что найдутся индексы $j_1, \dots, j_k \in I$ такие, что $G \in \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \dots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}$. Таким образом, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_{j_1} \vee^\infty \dots \vee^\infty \mathfrak{F}_{j_k}$. Значит, $\mathfrak{F}$ – компактный элемент в решетке l^∞. Лемма доказана.

Символом $L^\infty(\mathfrak{F})$ обозначается (см. [6]) решетка всех тотально локальных подклассов Фиттинга из $\mathfrak{F}$.

Лемма 9. *Пусть $\mathfrak{F}$ – тотально локальный класс Фиттинга. Тогда при любом натуральном $k \geqslant 2$ решетки $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$ и $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$ порождают одно и то же многообразие решеток.*

Доказательство. Зафиксируем некоторое тождество

$$\omega_1(x_{i_1}, \dots, x_{i_a}) = \omega(x_{j_1}, \dots, x_{j_b}) \qquad (*)$$

сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$.

Если тождество $(*)$ выполняется в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$, то оно выполняется и в любой подрешетке решетки $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$. Поэтому тождество $(*)$ справедливо в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$.

Пусть теперь тождество $(*)$ выполняется в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$ и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}$, $\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}$ – произвольные классы Фиттинга из $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$. Пусть f_{i_c} – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_{i_c}$, $c = 1, \dots, a$, и пусть f_{j_d} – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}_{j_d}$, $d = 1, \dots, b$. По лемме 7

$$\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \mathrm{LR}(\omega_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})), \qquad \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathrm{LR}(\omega_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})).$$

Заметим, что для любого $p \in \mathbb{P}$ классы

$$f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p), \quad f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)$$

принадлежат решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^{k-1})$. Следовательно,

$$\omega_1(f_{i_1}, \dots, f_{i_a})(p) = \omega_1(f_{i_1}(p), \dots, f_{i_a}(p)) = \omega_2(f_{j_1}(p), \dots, f_{j_b}(p)) = \omega_2(f_{j_1}, \dots, f_{j_b})(p).$$

Поэтому $\omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b})$. Таким образом, тождество $(*)$ справедливо в решетке $L^\infty(\mathfrak{F}\mathfrak{N}^k)$. Лемма доказана.

Лемма 10. *Пусть η – такая подрешетка решетки разрешимых тотально локальных классов Фиттинга, которая со всяким своим классом Фиттинга $\mathfrak{F}$ содержит и все его однопорожденные тотально локальные подклассы Фиттинга. Тогда тождество $\omega_1 = \omega_2$ сигнатуры $\{\cap, \vee^\infty\}$ истинно в η, если оно выполняется для всех однопорожденных тотально локальных классов Фиттинга из η.*

Доказательство. Пусть $x_{i_1}, \dots, x_{i_a}$ – переменные, входящие в терм ω_1; $x_{j_1}, \dots, x_{j_b}$ – переменные, входящие в терм ω_2, и пусть $\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}, \mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b} \in \eta$. Покажем, что

$$\mathfrak{F} = \omega_1(\mathfrak{F}_{i_1}, \dots, \mathfrak{F}_{i_a}) \subseteq \omega_2(\mathfrak{F}_{j_1}, \dots, \mathfrak{F}_{j_b}) = \mathfrak{M}.$$

Пусть $x_{j_1}, \dots, x_{j_t} \in \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\}$; но $\{x_{j_{t+1}}, \dots, x_{j_b}\} \cap \{x_{i_1}, \dots, x_{i_a}\} = \varnothing$. Пусть $A \in \mathfrak{F}$. Тогда по лемме 6 найдутся группы $A_{i_1}, \dots, A_{i_a}$ такие, что $A_{i_k} \in \mathfrak{F}_{i_k}$ для всех $k \in \{1, \dots, a\}$ и

$$A \in \mathfrak{S} \cap \omega_1(l^\infty \operatorname{fit} A_{i_1}, \dots, l^\infty \operatorname{fit} A_{i_a}).$$

Пусть $\mathfrak{H}_{i_k} = l^\infty \operatorname{fit} A_{i_k}$ и

$$\mathfrak{H}_{j_k} = \begin{cases} \mathfrak{H}_{i_c}, & \text{где } x_{j_k} = x_{i_c} \text{ для некоторого } c \in \{1, \dots, a\} \text{ при всех } k \in \{1, \dots, t\}, \\ l^\infty \operatorname{fit} B_{j_k} & \text{для некоторой группы } B_{j_k} \in \mathfrak{F}_{j_k} \text{ при } k > t. \end{cases}$$

По условию $\omega_1(\mathfrak{H}_{i_1}, \dots, \mathfrak{H}_{i_a}) = \omega_2(\mathfrak{H}_{j_1}, \dots, \mathfrak{H}_{j_b}) \subseteq \mathfrak{M}$. Значит, $A \in \mathfrak{M}$. Итак, $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$. Аналогично доказывается обратное включение. Лемма доказана.

Напомним [6], что если классы групп $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ таковы, что $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$, то через $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$ обозначается совокупность всех групп вида $\{A \times B \mid A \in \mathfrak{M}, B \in \mathfrak{H}\}$.

Теорема. *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, дистрибутивна и каждый ее элемент, отличный от* (1) *и* $\mathfrak{S}$, *не дополняем в ней.*

Доказательство. Покажем, что решетка $L^\infty(\mathfrak{S})$ алгебраична. Очевидно, любой тотально локальный класс Фиттинга есть объединение своих однопорожденных тотально локальных подклассов Фиттинга в решетке l^∞. Пусть $\mathfrak{F} = l^\infty \operatorname{fit} G$, где группа G разрешима. По лемме 8 $\mathfrak{F}$ – компактный элемент в решетке l^∞. Значит, $\mathfrak{F}$ будет компактным элементом и в подрешетке $L^\infty(\mathfrak{S})$ решетки l^∞. Следовательно, решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга алгебраична, и ее компактными элементами являются однопорожденные тотально локальные классы Фиттинга.

Докажем теперь, что решетка $L^\infty(\mathfrak{S})$ дистрибутивна. Но прежде индукцией по r покажем дистрибутивность решетки $L^\infty(\mathfrak{N}^r)$. Решетка $L^\infty(\mathfrak{N})$, очевидно, дистрибутивна. Пусть $r > 1$ и решетка $L^\infty(\mathfrak{N}^{r-1})$ дистрибутивна. Тогда по лемме 9 решетка $L^\infty(\mathfrak{N}^r)$ также дистрибутивна.

Пусть теперь $\mathfrak{F} = l^\infty \operatorname{fit} G$, где $l(G) = r$. Тогда $G \in \mathfrak{N}^r$ и поэтому $L^\infty(l^\infty \operatorname{fit} G) \subseteq L^\infty(\mathfrak{N}^r)$. Следовательно, решетка $L^\infty(l^\infty \operatorname{fit} G)$ дистрибутивна. Значит, ввиду леммы 10 решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга дистрибутивна.

Докажем теперь, что каждый разрешимый тотально локальный класс Фиттинга, отличный от (1) и $\mathfrak{S}$, не дополняем в решетке $L^\infty(\mathfrak{S})$. Пусть $\mathfrak{M} \neq (1)$ и $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{S}$ – разрешимый тотально локальный класс Фиттинга и пусть $\mathfrak{H}$ – дополнение к $\mathfrak{M}$ в решетке $L^\infty(\mathfrak{S})$. Тогда $\mathfrak{S} = \mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$.

Покажем, что $\mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H}$. Рассмотрим класс Фиттинга $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{H}$. Так как $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{H} = (1)$, то $\mathscr{K}(\mathfrak{M}) \cap \mathscr{K}(\mathfrak{H}) = \varnothing$, где $\mathscr{K}(\mathfrak{M})$ – набор всех композиционных факторов групп из $\mathfrak{M}$, $\mathscr{K}(\mathfrak{H})$ – набор всех композиционных факторов групп из $\mathfrak{H}$. Следовательно, по лемме 4 [14] $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$. Покажем, что класс $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{H}$ тотально локален. Пусть m и h – минимальные l^∞-значные H-функции классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Пусть f – H-функция такая, что

$$f(p) = \begin{cases} m(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{M}), \\ h(p), & \text{если } p \in \pi(\mathfrak{H}), \\ \varnothing, & \text{если } p \in \mathbb{P} \setminus (\pi(\mathfrak{M}) \cup \pi(\mathfrak{H})). \end{cases}$$

Покажем, что $\mathfrak{F} = \mathrm{LR}(f)$. Пусть G – группа минимального порядка из $\mathrm{LR}(f) \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G – комонолитическая группа и ее комонолит $M = G_{\mathfrak{F}}$. Поскольку $G \in \mathrm{LR}(f)$, то $F^p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$. Следовательно, если $p \in \pi(G)$, то по построению H-функции f либо $f(p) = m(p) \neq \varnothing$, либо $f(p) = h(p) \neq \varnothing$. Значит, $\pi(G) \subseteq \pi(\mathfrak{M}) \cup \pi(\mathfrak{H})$.

Пусть $p \in \pi(G/M)$. Тогда $p \in \pi(\mathfrak{M}) \cup \pi(\mathfrak{H})$. Пусть теперь $p \in \pi(\mathfrak{M})$. Следовательно, G/M – p-группа и $F^p(G) = O^p(G) \in f(p) = m(p)$. Значит, по лемме 4 $G \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Противоречие. Таким образом, $\mathrm{LR}(f) \subseteq \mathfrak{F}$.

Допустим, что обратное включение неверно и G – группа минимального порядка из $\mathfrak{F} \setminus \mathrm{LR}(f)$. Тогда G – комонолитическая группа. Поэтому либо $G \in \mathfrak{M}$, либо $G \in \mathfrak{H}$. Пусть $G \in \mathfrak{M} = \mathrm{LR}(m)$. Значит, $F^p(G) \in m(p) = f(p)$ для всех $p \in \pi(G)$. Следовательно, $G \in \mathrm{LR}(f)$. Значит, $\mathfrak{F} \subseteq \mathrm{LR}(f)$. Таким образом, $\mathfrak{F} = \mathrm{LR}(f)$ – тотально локальный класс Фиттинга. Но $\mathfrak{M}\vee\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$. Значит, $\mathfrak{M}\vee^{\infty}\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\oplus\mathfrak{H} = \mathfrak{M}\vee\mathfrak{H}$. Следовательно, для любой комонолитической группы $G \in \mathfrak{S}$ имеет место одно из двух: $G \in \mathfrak{M}$ или $G \in \mathfrak{H}$.

Пусть Z_p и Z_q – некоторые группы порядков p и q соответственно, где $p \in \pi(\mathfrak{M})$, $q \in \pi(\mathfrak{H})$. Пусть $r \in \mathbb{P}\setminus\{p,q\}$. Тогда ввиду [1, гл. B, следствие 10.7] группа $A = Z_p \times Z_q$ обладает простым точным модулем P над полем из r элементов $\mathbb{F}_r$. Пусть $B = [P]A$. Тогда $B \in \mathfrak{S}$ и, вместе с тем, $B \notin \mathfrak{M}$, поскольку $q \notin \pi(\mathfrak{M})$, и $B \notin \mathfrak{H}$, поскольку $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Но группа B комонолитична и, значит, либо $B \in \mathfrak{M}$, либо $B \in \mathfrak{H}$. Противоречие. Итак, каждый ненулевой и неединичный элемент решетки всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга не дополняем в ней. Теорема доказана.

Пусть L – произвольная решетка. *Псевдодополнением элемента a относительно элемента b* называется [15] наибольший из элементов x решетки L, удовлетворяющих неравенству $a \wedge x \leqslant b$. Псевдодополнение элемента a относительно элемента b обозначается через $a * b$. *Псевдодополнением элемента a в решетке с нулем* называется относительное псевдодополнение $a * 0$. *Решетка с псевдодополнениями* – это такая решетка с нулем, каждый элемент которой имеет псевдодополнение.

Согласно следствию 2 теоремы 1 из книги [16, гл. II, с. 151] из доказанной теоремы вытекает

Следствие 1. *Решетка всех разрешимых тотально локальных классов Фиттинга является решеткой с псевдодополнениями.*

Напомним, что представление элемента a в виде $x_0 \vee \cdots \vee x_{n-1}$ называется *сократимым*[16], если $a = x_0 \vee \cdots \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee \cdots \vee x_{n-1}$ для некоторого $0 \leqslant i < n$; в противном случае оно называется *несократимым*.

Тотально локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *l^{∞}-неприводимым* [2], если класс $\mathfrak{F}$ нельзя представить в виде $\mathfrak{F} = \vee^{\infty}(\mathfrak{F}_i \mid i \in I)$, где $\{\mathfrak{F}_i \mid i \in I\}$ – набор всех собственных тотально локальных подклассов Фиттинга из $\mathfrak{F}$.

Следствие 2. *Пусть $\mathfrak{F}$ – разрешимый однопорожденный тотально локальный класс Фиттинга. Тогда $\mathfrak{F}$ обладает единственным представлением в виде несократимого объединения $\mathfrak{F}_1 \vee^{\infty} \cdots \vee^{\infty} \mathfrak{F}_t$ некоторых своих тотально локальных l^{∞}-неприводимых подклассов Фиттинга $\mathfrak{F}_1, \ldots, \mathfrak{F}_t$.*

Доказательство. Ввиду следствия 13 теоремы 9 из книги [16, гл. II] для доказательства данного следствия достаточно лишь установить, что решетка $L^{\infty}(\mathfrak{F})$ всех тотально локальных подклассов Фиттинга произвольного разрешимого однопорожденного тотально локального класса Фиттинга $\mathfrak{F} = l^{\infty} \operatorname{fit} G$ конечна. Проведем индукцию по нильпотентной длине группы G.

Если $l(G) = 1$, то каждый неединичный тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$ имеет вид $\mathfrak{N}_{\pi}$, где $\pi \subseteq \pi(\mathfrak{F})$. Значит, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество тотально локальных подклассов Фиттинга.

Пусть $l(G) > 1$ и для всех тотально локальных классов Фиттинга вида $l^{\infty} \operatorname{fit} A$, где $l(A) < l(G)$, решетка $L^{\infty}(l^{\infty} \operatorname{fit} A)$ конечна. Пусть $\mathfrak{M}$ – произвольный тотально локальный подкласс Фиттинга из $\mathfrak{F}$ и пусть m и f – минимальные l^{∞}-значные H-функции классов $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{F}$ соответственно. Тогда из леммы 1 вытекает, что $m \leqslant f$. Кроме того, ввиду этой же леммы при любом $p \in \pi(\mathfrak{F})$ имеет место равенство

$$f(p) = l^{\infty} \operatorname{fit}(F^{p}(A) \mid A \in \mathfrak{F}).$$

Поскольку $l(F^p(G)) < l(G)$, по индукции решетка $L^\infty(f(p))$ конечна. Так как при этом конечно и множество $\pi(\mathfrak{F})$, в $\mathfrak{F}$ имеется лишь конечное множество тотально локальных подклассов Фиттинга. Следствие доказано.

Для любых двух тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, через $\mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{M}$ обозначается [6] решетка тотально локальных классов Фиттинга, заключенных между $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$.

Так как всякая дистрибутивная решетка является модулярной, из доказанной теоремы вытекает

Следствие 3. *Для любых двух разрешимых тотально локальных классов Фиттинга $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ справедлив решеточный изоморфизм*

$$\mathfrak{M} \vee^\infty \mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{M} \simeq \mathfrak{H}/^\infty\mathfrak{H} \cap \mathfrak{M}.$$

Следствие 4 [6, теорема 4.1.7]. *Решетка всех разрешимых тотально локальных формаций дистрибутивна.*

Доказательство. Покажем, что каждый разрешимый тотально локальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ наследственен. Не теряя общности, мы можем предполагать, что $\mathfrak{F} = l^\infty \operatorname{fit} G$ для некоторой разрешимой группы G. Если G – нильпотентная группа, то утверждение очевидно. Пусть нильпотентная длина t группы G больше 1. Тогда если f – минимальная l^∞-значная H-функция класса $\mathfrak{F}$, то поскольку $l(F^p(G)) < t$, ввиду соображений индукции для любого $p \in \pi(G)$ класс Фиттинга $f(p) = l^\infty \operatorname{fit}(F^p(G))$ наследственен. Значит, класс $\mathfrak{F}$ наследственен, и поэтому ввиду результатов работы [17] класс $\mathfrak{F}$ является тотально локальной формацией. Следовательно, каждый разрешимый тотально локальный класс Фиттинга является тотально локальной формацией.

Рассуждая аналогичным образом, легко убедиться, что каждая разрешимая тотально локальная формация является наследственным классом Фиттинга. Но по теореме работы [7] каждый разрешимый наследственный класс Фиттинга является тотально локальным классом Фиттинга. Значит, каждая разрешимая тотально локальная формация является тотально локальным классом Фиттинга.

Таким образом, решетки $L^\infty(\mathfrak{S})$ и $L_\infty(\mathfrak{S})$ совпадают. Поэтому ввиду доказанной теоремы решетка всех разрешимых тотально локальных формаций дистрибутивна. Следствие доказано.

Предложенная в настоящей работе техника доказательств и методы рассуждений тесно привязаны к условию разрешимости. Что же касается неразрешимого случая, то мы не можем ничего сказать даже о модулярности решетки всех тотально локальных классов Фиттинга.

Вопрос. Дистрибутивна (или хотя бы модулярна) ли решетка всех тотально локальных классов Фиттинга?

Аналогичный вопрос для тотально локальных формаций приведен в монографии [6, вопрос 4.2.14].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Doerk K., Hawkes T. Finite Soluble Groups. Berlin–New York: Walter de Gruyter, 1992.

[2] Скиба А. Н., Шеметков Л. А. Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп. Препринты Гомельского госуниверситета, 1997.

[3] Скиба А. Н. О локальных формациях длины 5 // Арифметическое и подгрупповое строение конечных групп. Минск: Наука и техника, 1986. С. 135–149.

[4] Hawkes T. O. Sceletal classes of soluble groups // Arch. Math. 1971. V. 22. №6. P. 577–589.

[5] Шеметков Л. А., Скиба А. Н. Формации алгебраических систем. М.: Наука, 1989.

[6] Скиба А. Н. Алгебра формаций. Минск: Беларуская навука, 1997.

[7] Воробьев Н. Т. О предположении Хоукса для радикальных классов // Сиб. матем. ж. 1996. Т. 37. №6. С. 1296–1302.

[8] Каморников С. Ф. О двух задачах из “Коуровской тетради” // Матем. заметки. 1994. Т. 55. №6. С. 59–63.

[9] Семенчук В. Н. Описание разрешимых минимальных не $\mathfrak{F}$-групп для произвольной тотально локальной формации $\mathfrak{F}$ // Матем. заметки. 1988. Т. 43. №4. С. 452–459.

[10] Семенчук В. Н. Разрешимые тотально локальные формации // Сиб. матем. ж. 1995. Т. 36. №4. С. 869–872.

[11] Воробьев Н. Т. Локальные произведения классов Фиттинга // Весці АН БССР. Сер. фіз.-матэм. навук. 1991. №6. С. 28–32.

[12] Lockett F. P. The Fitting class $\mathfrak{F}^*$ // Math. Z. 1974. V. 137. №2. P. 131–136.

[13] Воробьев Н. Т. О радикальных классах конечных групп с условием Локетта // Матем. заметки. 1988. Т. 43. №2. С. 161–168.

[14] Ведерников В. А. О локальных формациях конечных групп // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №6. С. 32–37.

[15] Артамонов В. А., Салий В. Н, Скорняков Л. А., Шеврин Л. Н., Шульгейфер Е. Г. Общая алгебра. Т. 2. М.: Наука, 1991.

[16] Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[17] Bryce R. A., Cossey J. Fitting formation of finite soluble groups // Math. Z. 1972. V. 127. №3. P. 217–223.

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины
E-mail: `vorobyov@gsu.unibel.by, skiba@gsu.unibel.by`

Поступило
22.04.1999