Го Вэньбинь, Е. В. Легчекова, А. Н. Скиба, Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами, *Матем. заметки*, 2009, том 86, выпуск 3, 350–359

https://www.mathnet.ru/mzm8499

Математические заметки

Том 86 выпуск 3 сентябрь 2009

УДК 512.54

Конечные группы, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами

Го Вэньбинь, Е. В. Легчекова, А. Н. Скиба

Описана структура конечных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами.

Библиография: 19 названий.

1. Введение. Все рассматриваемые в данной работе группы являются конечными. Напомним, что подгруппа H группы G называется 2-*максимальной* подгруппой (или второй максимальной подгруппой) группы G, если H является максимальной подгруппой в некоторой максимальной подгруппе M группы G. Аналогично могут быть определены 3-максимальные подгруппы, 4-максимальные подгруппы и так далее.

Связь между i-максимальными подгруппами (где $i > 1$) группы G и структурой группы G исследовалась многими авторами. Но, пожалуй, наиболее ранний результат в данном направлении был получен Хуппертом в работе [1], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы нормальны. В этой же работе Хупперт доказал, что в случае, когда каждая третья максимальная подгруппа группы G является нормальной в G, коммутант G' группы G нильпотентен и порядок каждого главного фактора группы G не содержит куба простого числа. Развивая эти два результата Хупперта, Янко в работе [2] получил описание групп, в которых 4-максимальные подгруппы нормальны. В работах Судзуки [3] и Янко [4] содержится описание конечных неразрешимых групп, в которых все 2-максимальные подгруппы нильпотентны. Описание разрешимых групп, в которых все вторые максимальные подгруппы являются нильпотентными, было получено Белоноговым в работе [5]. Эти результаты получили развитие в работе Семенчука [6], где дано описание разрешимых групп, у которых все их 2-максимальные подгруппы сверхразрешимы. Гаген и Янко в работе [7] описали простые группы, чьи 3-максимальные подгруппы являются нильпотентными. Агроваль [8] доказал, что группа G является сверхразрешимой, если все ее 2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми силовскими подгруппами группы G. Отмеченные выше результаты Хупперта получили свое дальнейшее развитие также и в работе Полякова [9], который доказал, что группа является сверхразрешимой, если все ее

2-максимальные подгруппы перестановочны со всеми ее максимальными подгруппами.

Среди недавних публикаций в данном направлении отметим работу Го и Шама [10], где доказана разрешимость групп, в которых все 2-максимальные подгруппы обладают свойством покрытия-изолирования; работу [11], где описаны группы, у которых все их ненильпотентные 2-максимальные подгруппы являются TI-множествами и работы [12], [13], где получены характеризации сверхразрешимых групп в терминах 2-максимальных подгрупп. Отметим, наконец, работу [14] (см. также [15]), где получено описание ненильпотентных групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми 2-максимальными подгруппами. Дополняя последний результат, в данной заметке мы дадим описание групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами.

2. Предварительные леммы. Пусть A и B – подгруппы группы G и $\varnothing \neq X \subseteq G$. Тогда мы говорим, следуя [16], что A является X-*перестановочной* с B, если $AB^x = B^xA$ для некоторого $x \in X$.

Лемма 2.1 [16]. *Пусть A, B, X – подгруппы группы G и $K \trianglelefteq G$. Тогда верны следующие утверждения*:

(1) *если A является X-перестановочной с B, то B является X-перестановочной с A*;

(2) *если A является X-перестановочной с B, то AK/K является XK/K-перестановочной с BK/K в G/K*;

(3) *если $K \leqslant A$, то A/K является XK/K-перестановочной с BK/K в G/K тогда и только тогда, когда A является X-перестановочной с B в G.*

Следующая лемма хорошо известна (см., например, [18; VI, 4.5] и [19; лемма 1.44]).

Лемма 2.2. *Пусть A, B – собственные подгруппы в G с условием $G = AB$. Тогда $G = AB^x$ и $G \neq AA^x$ для всех $x \in G$.*

Пусть E – подгруппа группы G. Символом E_G мы обозначаем наибольшую нормальную подгруппу группы G, содержащуюся в E. Напомним, что группа G называется *примарной*, если $|G| = p^a$ для некоторо простого числа p.

Лемма 2.3. *Пусть E – максимальная подгруппа группы G. Предположим, что E перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами из G. Тогда справедливы следующие утверждения*:

(1) *любая 2-максимальная подгруппа из E содержится в E_G; в частности, $|E : E_G| \in \{1, p, pq\}$, где p и q – простые (не обязательно различные) числа*;

(2) *каждая максимальная подгруппа группы E, отличная от E_G, является циклической примарной группой.*

Доказательство. (1) Предположим, что $E \neq E_G$ и E/E_G не является группой простого порядка. Пусть V – произвольная 2-максимальная подгруппа в E. Тогда V^x является 3-максимальной подгруппой в G для всех $x \in G$ и поэтому $EV^x = V^xE$ – подгруппа группы G. Если $EV^x = G$, то $G = EE^x$, что противоречит лемме 2.2. Следовательно, ввиду максимальности E имеет место $EV^x = E$, что влечет $V \leqslant E_G$.

Следовательно, каждая максимальная подгруппа из E/E_G имеет простой порядок и поэтому $|E/E_G| = pq$ для некоторых (не обязательно различных) простых p и q.

(2) Пусть T_1 – максимальная подгруппа группы E, отличная от E_G и T_2 – максимальная подгруппа группы T_1. Тогда T_2 является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому ввиду (1) имеет место $T_2 \leqslant E_G$. Так как $T_2 \leqslant T_1 \cap E_G \leqslant T_1$, мы видим, что либо $T_1 = T_1 \cap E_G$, либо $T_2 = T_1 \cap E_G$. Ясно, что первый случай невозможен. Таким образом, $T_2 = T_1 \cap E_G$ является единственной максимальной подгруппой в T_1 и поэтому T_1 – циклическая примарная группа.

Лемма 2.4. *Пусть G – p-разрешимая группа. Если все максимальные подгруппы группы G с индексом, равным степени p, являются нормальными в G, то G p-нильпотентна.*

Доказательство. См. доказательство теоремы 9.3 на с. 717 в книге [18].

В дальнейшем мы используем символ $[A]B$ для обозначения полупрямого произведения группы A с группой ее операторов B.

Лемма 2.5. *Пусть $X = F(G)$ – подгруппа Фиттинга группы G. Если каждая максимальная подгруппа группы G X-перестановочна со всеми 3-максимальными подгруппами из G, то G разрешима и ее p-длина $l_p(G)$ не превосходит 2 для всех простых p.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ – класс всех разрешимых групп A с $l_p(A) \leqslant 2$ для всех простых p. Предположим, что $G \notin \mathscr{F}$ и пусть G – контрпример минимального порядка.

Хорошо известно [17; I, теоремы 4.3, 5.5 и 5.6], что $\mathscr{F}$ является насыщенной формацией Фиттинга. Пусть H – минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда $G/H \in \mathscr{F}$. Действительно, если $H = G$, то это очевидно. В противном случае по лемме 2.1 условие теоремы верно для G/H и поэтому $G/H \in \mathscr{F}$, по выбору группы G. Следовательно, H является единственной минимальной нормальной подгруппой группы G и $H \nsubseteq \Phi(G)$. Пусть M – максимальная подгруппа в G такая, что $H \nsubseteq M$. Тогда $M_G = 1$ и $G = HM$.

Прежде докажем, что G разрешима. Для этой цели нам достаточно лишь установить, что $X \neq 1$. Допустим, что $X = 1$. Тогда согласно лемме 2.3 для любой максимальной подгруппы E группы G с условием $E_G = 1$ найдутся такие простые (не обязательно различные) числа p и q, что $|E| \in \{p, pq\}$. Если $H = G$ – простая группа, то все максимальные подгруппы группы G сверхразрешимы и поэтому G разрешима [18; V, теорема 26.3]. Значит, $H \neq G$. Так как $G = HM$ и $|M| \in \{p, pq\}$, то H является либо максимальной, либо 2-максимальной подгруппой группы G. Пусть V – произвольная 3-максимальная подгруппа группы G, содержащаяся в H. Тогда MV^x является подгруппой в G для любого $x \in G$, что ввиду $|M| \in \{p, pq\}$ влечет $V^x \leqslant M$. Значит, $V^G \leqslant M$ и поэтому $V = 1$. Следовательно, либо H – группа простого порядка, либо все ее максимальные подгруппы имеют простой порядок, что влечет разрешимость подгруппы H. Полученное противоречие показывает, что $X \neq 1$ и поэтому G разрешима. Это означает, что $G = [H]M$. Заметим также, что поскольку $C_G(H) \cap M$ – нормальная в G подгруппа и $M_G = 1$, то $C_G(H) = C_G(H) \cap HM = H(C_G(H) \cap M) = H$. А поскольку подгруппа Фиттинга содержится в централизаторе любого главного фактора группы [18; VI, теорема 5.4], то $H = C_G(H) = O_q(G) = F(G)$ для некоторого простого q.

Пусть p – такое простое число, что $l_p(G) > 2$. Тогда $q = p$ и подгруппа M не является нильпотентной. Следовательно, M имеет ненормальную максимальную подгруппу, скажем E. Пусть V – максимальная подгруппа в E. Тогда HE является максимальной подгруппой в G и V является 3-максимальной подгруппой в G. Следовательно, по лемме 2.3 имеет место $V \leqslant (HE)_G$. Легко видеть, что HV – максимальная подгруппа в HE. Так как $HV \leqslant (HE)_G \leqslant HE$, то $HV = (HE)_G$ ввиду того, что E – ненормальная подгруппа в M. Это означает, что $V = HV \cap M$ нормальна в M. Итак, каждая максимальная подгруппа группы E является нормальной в M и, следовательно, E нильпотентна. Допустим, что M имеет ненормальную максимальную подгруппу E такую, что E содержит некоторую силовскую p-подгруппу P группы M. Допустим, что $E = P$, и пусть L – минимальная нормальная подгруппа в M. Так как M разрешима и $H = O_p(G)$, то L является q-группой для некоторого простого $q \neq p$ и поэтому $M = LP$, ввиду максимальности $P = E$ в M. В этом случае $l_p(G) \leqslant 2$, что противоречит выбору G. Следовательно, $P \neq E$ и поэтому P нормальна в M. В этом случае мы имеем даже $l_p(G) = 1$. Следовательно, индекс каждой ненормальной максимальной подгруппы группы M есть степень p. Ввиду леммы 2.4 это означает, что группа M является q-нильпотентной для каждого простого $q \neq p$. Но тогда ввиду [18; I, лемма 2.13, b)] подгруппа M является p-замкнутой, что влечет $l_p(G) = 1$. Это противоречие завершает доказательство леммы.

Напомним, что группа G называется *примитивной*, если G имеет максимальную подгруппу M с $M_G = 1$.

Лемма 2.6. *Пусть G – ненильпотентная примитивная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы G в том и только том случае, когда G является группой одного из следующих типов*:

(1) $G = [N]M$, *где N – группа простого порядка p и M – группа простого порядка $q \neq p$*;

(2) $G = [N]M$, *где N – минимальная нормальная подгруппа в G порядка p^2 и M – группа простого порядка $q \neq p$*;

(3) $G = [N]M$, *где N – группа простого порядка p и M – циклическая группа порядка qr для некоторых простых (не обязательно различных) $q \neq p$ и $r \neq p$.*

Доказательство. Пусть M – максимальная подгруппа группы G с $M_G = 1$. Предположим, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы G. Тогда по лемме 2.5 группа G разрешима и поэтому $G = [N]M$, где $N = F(G) = O_p(G) = C_G(N)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа группы G для некоторого простого p [19; теорема 4.42]. Предположим, что M не является группой простого порядка. Тогда по лемме 2.3 имеет место $|M| = rq$ для некоторых (не обязательно различных) простых q и r. Значит, N является 2-максимальной подгруппой в G. Предположим, что $|N| > p$, и пусть N_1 – максимальная подгруппа в N. Тогда N_1 является

3-максимальной подгруппой в G. По условию подгруппа N_1 является перестановочной с M и поэтому $M < N_1M < G$, что противоречит максимальности M. Таким образом, $|N| = p$ и поэтому $M \simeq G/N = G/C_G(N)$ – циклическая группа [18; I, 4.6]. Значит, $q \neq p \neq r$ [17; I, лемма 3.9]. Таким образом, G – группа типа (3). Если же $|M|$ – простое число, то, очевидно, G является группой одного из типов (1), (2). Заметим, наконец, что если G – группа типа (1), то в ней 3-максимальные подгруппы отсутствуют, а если G является группой одного из типов (2), (3), то единичная подгруппа является единственной 3-максимальной подгруппой в G.

3. Основной результат. В нильпотентной группе все ее максимальные подгруппы нормальны и поэтому все 3-максимальные подгруппы перестановочны со всеми максимальными погдруппами. В ненильпотентном случае имеет место следующая

Теорема 3.1. *Пусть G – ненильпотентная группа. Тогда каждая 3-максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы G в том и только в том случае, когда либо $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 3$, либо G изоморфна $SL(2,3)$, либо G является сверхразрешимой группой одного из следующих типов*:

(1) *$G = [P]M$, где P – группа простого порядка p и M – группа с циклическими силовскими подгруппами такая, что $|M| = rq^\alpha$, где $\alpha > 1$, r и q – различные простые числа, $q \neq p$, подгруппа M_G q-замкнута и $|M : M_G| = q$;*

(2) *$G = [P]Q$, где P – группа простого порядка p, Q – циклическая q-группа с $|Q| > q^2$ $(q \neq p)$ и $|Q : Q_G| = q^2$;*

(3) *$G = [P]Q$, где P – группа простого порядка p, Q – q-группа с $|Q| > q^2$ $(q \neq p)$, $|Q : Q_G| = q$ и все отличные от Q_G максимальные подгруппы группы Q являются циклическими.*

Доказательство. *Необходимость.* Допустим, что каждая 3-максимальная подгруппа группы G перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы G, и что G не является группой с $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r являются простыми и $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 3$.

Так как G – ненильпотентная группа, некоторая максимальная подгруппа M группы G не является нормальной. Следовательно, $G/M_G = [N/M_G](M/M_G)$ – ненильпотентная примитивная группа, удовлетворяющая условию леммы 2.6, и поэтому G/M_G имеет структуру, описанную в этой лемме. В частности, ввиду нашего исходного предположения о группе G $M_G \neq 1$.

Рассмотрим следующие формально возможные случаи.

I. Имеем $|M/M_G| = qr$, где q и r – простые (необязательно различные) числа.

По лемме 2.6 имеет место $|N/M_G| = p$, где p – простое число и $q \neq p \neq r$ и M/M_G – циклическая группа. Так как $|M/M_G| = qr$, M_G не является максимальной подгруппой в M. Значит, по лемме 2.3, (2) каждая максимальная подгруппа группы M является циклической примарной группой. Следовательно, M является сверхразрешимой группой согласно [18; IV, теорема 2.11]. Предположим, что $q \neq r$. В этом случае имеет место $|M| = qr$ и поэтому $M_G = 1$. Полученное противоречие показывает, что $q = r$ и поэтому M – силовская q-подгруппа группы G. Так как по лемме 2.6, (3) факторгруппа G/M_G сверхразрешима и M_G – циклическая группа, G сверхразрешима. Допустим, что q – наибольший простой делитель $|G|$. Тогда M нормальна в G, что противоречит выбору подгруппы M. Таким образом, p – наибольший простой делитель $|G|$ и, следовательно, силовская p-подгруппа P группы G является нормальной в G. Значит, $G = [P]M$, где $P \simeq N/M_G$ – группа порядка p, M – q-группа с $|M| > q^2$ и $|M : M_G| = q^2$. Предположим, что M не является циклической группой. Заметим, что поскольку каждая 2-максимальная подгруппа группы M содержится в M_G, то $M_G \neq 1$ – единственная 2-максимальная подгруппа в M. Значит, согласно [18; III, теоремы 8.2 и 8.4] имеет место $|M_G| = 2$ и M изоморфна группе кватернионов порядка 8. В этом случае имеет место $M_G \leqslant Z(M)$. Но поскольку M/M_G – циклическая группа, это означает, что M является абелевой группой. Полученное противоречие показывает, что M является циклической группой. Таким образом, G является группой типа (2).

II. Пусть $|M/M_G| = q$. Тогда по лемме 2.6 либо $|N/M_G| = p^2$, либо $|N/M_G| = p$ $(p \neq q)$.

Пусть P – силовская p-подгруппа в G.

1. Допустим, что $|N/M_G| = p^2$.

По лемме 2.3, (2) каждая максимальная подгруппа группы M, отличная от M_G, является циклической примарной группой.

Допустим, что M является q-группой. Тогда $|P| = p^2$. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P. Допустим, что $M_G \neq 1$. Ясно, что P_1M_G является 2-максимальной подгруппой в G. Пусть T – максимальная подгруппа в P_1M_G такая, что $P_1 \leqslant T$. Тогда T является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому $TM = P_1M$ – подгруппа группы G. Это приводит к тому, что $M < P_1M < G$. Это противоречие показывает, что $M_G = 1$ и $G = [P]M$, где P – минимальная нормальная подгруппа в G порядка p^2 и $|M| = q$. Таким образом, $|G| = p^2q$, что противоречит нашему предположению о группе G.

Предположим теперь, что $|\pi(M)| = 2$ и пусть $\pi(M) = \{q, r\}$. Пусть R – силовская r-подгруппа в M, Q – силовская q-подгруппа в M и M_1 – такая максимальная подгруппа в M, что Q содержится в M_1. Тогда $M_1 = Q$. Так как Q – циклическая силовская q-подгруппа в M, то M является q-сверхразрешимой группой.

Допустим, что $|Q| > q^2$. Пусть Q_1 – силовская q-подгруппа в M_G, и пусть Q_2 – максимальная подгруппа в Q_1. Тогда $Q_2 \neq 1$. Допустим, что $O_{q'}(M) = 1$. Тогда группа M является сверхразрешимой и $q > r$. Это означает, что Q нормальна в M и поэтому $|R| = r$. Понятно также, что Q_1 является характеристической подгруппой в M_G, а поэтому – нормальной подгруппой в G. Так как Q – циклическая группа, Q_2 также является нормальной подгруппой в G.

Допустим, что $r = p$. Пусть P_1 – такая максимальная подгруппа в P, что $R \leqslant P_1$. Тогда $T = Q_2P_1$ является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому подгруппы T и M являются перестановочными. Но тогда $M < TM = Q_2P_1M = P_1M < G$, что противоречит максимальности M. Таким образом, $r \neq p$. Пусть теперь P_1 – максимальная подгруппа в P. Тогда $T = P_1Q_1$ является 3-максимальной подгруппой в G и $M < TM = P_1Q_1M = P_1M < G$. Это противоречие показывает, что $O_{q'}(M) \neq 1$. Следовательно, $O_r(M) \neq 1$. Легко видеть, что $R = O_r(M)$. Таким образом, $M = [R]Q$. А так как R – силовская r-подгруппа в M_G, $R \operatorname{char} M_G$. Следовательно, $R \lhd G$. Так как M_G/R – циклическая группа, то RQ_2 – нормальная подгруппа в G. Допустим, что $r = p$. Пусть P_1 – максимальная подгруппа в P такая, что $R \leqslant P_1$. Тогда $M < (P_1RQ_2)M = P_1M < G$, что противоречит максимальности M. Аналогично проверяется, что случай $r \neq p$ также невозможен. Это противоречие показывает, что $|Q| \leqslant q^2$. Легко проверить, что случай $|Q| = q^2$ также приводит к противоречию.

Пусть теперь $|Q| = q$. Предположим, что $r = p$. Тогда $M_G \leqslant P$ и, следовательно, $N = PM_G = P$ – нормальная силовская p-подгруппа в G. Следовательно, $G = NM = PM = [P]Q$. Пусть P_1 – такая максимальная подгруппа в P, что M_G – максимальная подгруппа в P_1. Пусть P_2 – максимальная подгруппа в P_1. Ясно, что P_2 является 3-максимальной подгруппой в G и поэтому $P_2^xM = M{P_2}^x$ для всех $x \in G$. Следовательно, $P_2 \leqslant M_G$. Таким образом, M_G – единственная максимальная подгруппа в P_1. Поэтому P_1 является циклической группой. Пусть $T \neq P_1$ – максимальная подгруппа в P. Так как $p = |P : T| = |TP_1 : T| = |P_1 : T \cap P_1|$, M_G – максимальная подгруппа в T. Пусть $P_2 \neq M_G$ – максимальная подгруппа в T. Понятно, что P_2 является 3-максимальной подгруппой в G. Следовательно, P_2 перестановочна с M и поэтому $P_2M = P_2M_GQ = TQ < G$. Это влечет, что $P_2 = M_G$. Таким образом, M_G – единственная 2-максимальная подгруппа в P. Следовательно, по [18; III, теорема 8.4] P – либо циклическая группа, либо изоморфна группе кватернионов порядка 8. В первом случае имеет место $P_1 \operatorname{char} P \lhd G$, что влечет $P_1 \lhd G$ и поэтому $M < P_1Q < G$; противоречие. Во втором случае $G = [P]Q$, где Q – группа порядка 3 и поэтому $G \simeq SL(2,3)$. Случай $r \neq p$ невозможен. Действительно, если P_1 – максимальная подгруппа в P и E – такая максимальная подгруппа в P_1M_G, которая содержит P_1, то $M < EM < G$, что противоречит максимальности M.

2. Наконец, мы рассмотрим случай, когда для любой ненормальной максимальной подгруппы E группы G мы имеем $|G : E_G| = pq$, где p и q – различные простые числа. В этом случае для любой максимальной подгруппы E группы G факторгруппа G/E_G сверхразрешима и поэтому G является сверхразрешимой группой. Пусть для максимальной подгруппы M с $G/M_G = [N/M_G](M/M_G)$ имеет место $|M/M_G| = q$ и $|N/M_G| = p$. Пусть $M_1 \neq M_G$ – максимальная подгруппа в M. Тогда как и выше можно убедиться, что M_1 – циклическая примарная группа и поэтому $|M| = q^\alpha r$ для некоторых $\alpha \in \mathbb{N}$ и простого числа r. Таким образом, $|G| = pq^\alpha r$, где $\alpha > 1$. Пусть P – силовская p-подгруппа в G, Q и R – силовские q-подгруппа и r-подгруппа группы M соответственно. Понятно, что Q – ненормальная подгруппа группы G.

Прежде допустим, что p, q, r – различные простые числа. Тогда $|P| = p$ и $|R| = r$. Покажем, что G является группой типа (1). Прежде предположим, что P – нормальная подгруппа в G и пусть Q_1 – максимальная в Q подгруппа. Тогда Q_1 является 3-максимальной подгруппой в G и $G = [P]M$. Покажем, что M_G – q-замкнутая группа. Пусть T – подгруппа группы G с $|G : T| = r$. Так как по условию для всех $x \in G$ имеет место ${Q_1}^xT = T{Q_1}^x$, то $Q_1 \leqslant T_G$. Следовательно, $|T : T_G| \leqslant q$. Ввиду цикличности Q это означает, что Q_1 нормальна в M и поэтому M_G – q-замкнутая группа. Таким образом, G является группой типа (1). Пусть P ненормальна в G. Тогда r – наибольший простой делитель порядка группы G и поэтому R нормальна в G. Пусть T – такая максимальная подгруппа в G, что $P \leqslant T$ и $|G : T| = r$. Допустим, что T нормальна в G. Если $P \lhd T$, то $P \operatorname{char} T \lhd G$ и поэтому P нормальна в G.

Это противоречие показывает, что Q является нормальной подгруппой в T. Таким образом, Q – нормальная подгруппа в G. Но это противоречит строению группы G/M_G. Следовательно, T – ненормальная подгруппа в G и поэтому согласно нашему предположению о группе G G/T_G является группой типа (1) из леммы 2.4. Но это, как и выше, позволяет показать, что G является группой типа (1). Если $r = p$, то аналогично можно убедиться, что G является группой типа (1).

Допустим теперь, что $r = q$. Тогда M является силовской q-подгруппой в G. Так как G сверхразрешима, то P нормальна в G и поэтому G является группой типа (3).

Достаточность. Пусть T – максимальная подгруппа в G и K – 3-максимальная подгруппа в G. Мы докажем, что K и T перестановочны. Если $|G| = p^\alpha q^\beta r^\gamma$, где p, q, r – простые числа и $\alpha + \beta + \gamma \leqslant 3$, либо G изоморфна $SL(2, 3)$, то это очевидно. Предположим, что G – сверхразрешимая группа одного из типов (1)–(3). Тогда $|G : T|$ – простое число.

Допустим, что G – группа типа (1). Предположим, что $r \neq p$ (случай, когда $r = p$, рассматривается аналогично). Пусть Q и R – силовские q-подгруппа и r-подгруппа в M соответственно. Тогда $|R| = r$ и поскольку группа G сверхразрешима, по крайней мере, одна из подгрупп R или Q нормальна в M. Предположим, что R нормальна в M. Тогда R, будучи характеристической в M_G, является нормальной в G. Если $|G : T| = q$, то $P \leqslant T$. Следовательно, $TM = G$ и $T = T \cap PM = P(T \cap M)$. Так как по условию имеет место $|M : M_G| = q$, подгруппа M_G q-замкнута и группа Q является циклической, максимальная подгруппа Q_1 из Q нормальна в G. А поскольку $q = |G : T| = |M : T \cap M|$, $T \cap M = RQ_1$ является нормальной подгруппой в G, что влечет нормальность подгруппы T в G. Поэтому $TK = KT$. Допустим, что $|G : T| = p$. Тогда $T = RQ^x = M^x$ для некоторого $x \in G$. Если $|G : K| = rq^2$ или $|G : K| = q^3$, то $G = TK = KT$. Пусть $|G : K| = pqr$. Тогда K является q-группой и поэтому для некоторого $y \in G$ имеет место $K \leqslant Q^y$ и $|Q^y : K| = q$. Но тогда $K = M_G \cap Q^y \leqslant M^x = T$, что влечет $TK = T = KT$. Аналогично, если $|G : K| = pq^2$, то $K \leqslant M_G$ и поэтому $TK = T = KT$. Случай, когда $|G : T| = r$, рассматривается аналогично. Предположим теперь, что подгруппа Q является нормальной в M. Заметим, что максимальная подгруппа Q_1 группы Q нормальна в G. Действительно, так как по условию подгруппа M_G является q-замкнутой и, очевидно, Q_1 – силовская q-подгруппа в M_G, то Q_1 характеристична в M_G, что влечет нормальность этой подгруппы в G. Следовательно, $RQ_1 = M_G$ – единственная подгруппа группы G с индексом q. Но тогда группа M является нильпотентной и поэтому R нормальна в M. Мы пришли к случаю, который нами уже рассмотрен. Аналогично рассматриваются случаи, когда G – группа одного из типов (2) или (3).

Доказательство теоремы завершено.

Следствие 3.2. *Если каждая* 3*-максимальная подгруппа группы* G *перестановочна со всеми максимальными подгруппами группы* G *и* $|\pi(G)| > 3$, *то* G *нильпотентна.*

В заключение отметим, что все классы групп, принадлежащие к типам, описанным в теореме 3.1, являются непустыми.

Пусть p, r и q – простые числа и q делит оба числа $p - 1$ и $r - 1$. Пусть P, R и Q – группы порядков p, r и q соответственно. Тогда обе группы $\mathrm{Aut}(P)$ и $\mathrm{Aut}(R)$

имеют подгруппу порядка q и поэтому существуют неабелева группа $M = [R]Q$, где $Q = \langle a \rangle$ – циклическая группа порядка q^2 и $C_Q(R) = \langle a^q \rangle$, и сверхразрешимая ненильпотентная группа $G = [P]M$, где $C_M(P) = R\langle a^q \rangle = R \times \langle a^q \rangle = M_G$. Понятно, что G – группа типа (1) из теоремы 3.1. Аналогично может быть построена группа типа (2).

Пусть $Q = \langle x, y \mid x^9 = y^3 = 1,\ x^y = x^4 \rangle$ и Z_7 – группа порядка 7. Тогда $\Omega_1(Q) = \Omega$ является абелевой группой порядка 9. Так как факторгруппа Q/Ω изоморфна подгруппе Z_3 порядка 3 группы автоморфизмов $\mathrm{Aut}\, Z_7$, мы можем построить $G = [Z_7]Q$. Понятно, что $\langle y \rangle$ является 3-максимальной подгруппой в G и $\langle y \rangle$ – ненормальная подгруппа в G. Несложно проверить, что все, отличные от Ω максимальные подгруппы группы Q, являются циклическими и поэтому G – группа типа (3). Этот пример показывает, что класс групп, в которых каждая 3-максимальная подгруппа перестановочна со всеми максимальными подгруппами, шире класса групп, в которых все их 3-максимальные подгруппы нормальны.

В заключение отметим следующий открытый вопрос, который нам кажется вполне естественным ввиду леммы 2.5 и теоремы 3.1: *каково точное строение ненильпотентной группы G, в которой все 3-максимальные подгруппы $F(G)$-перестановочны со всеми максимальными подгруппами*?

Авторы выражают глубокую благодарность рецензенту, указавшему на пробел в первоначальной версии доказательства леммы 2.5, и за другие полезные замечания.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] B. Huppert, “Normalteiler und maximale Untergruppen endlicher Gruppen”, *Math. Z.*, **60** (1954), 409–434.

[2] Z. Janko, “Finite groups with invariant fourth maximal subgroups”, *Math. Z.*, **82** (1963), 82–89.

[3] M. Suzuki, “The nonexistence of a certain type of simple groups of odd order”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **8**:2 (1957), 686–695.

[4] Z. Janko, “Endliche Gruppen mit lauter nilpotenten zweitmaximalen Untergruppen”, *Math. Z.*, **79** (1962), 422–424.

[5] В. А. Белоногов, “Конечные разрешимые группы с нильпотентными 2-максимальными подгруппами”, *Матем. заметки*, **3**:1 (1968), 21–32.

[6] В. Н. Семенчук, “Разрешимые группы со вторыми максимальными сверхразрешимыми подгруппами”, *Вопросы алгебры*, Вып. 1, Университетское, Минск, 1985, 86–96.

[7] T. M. Gagen, Z. Janko, “Finite simple groups with nilpotent third maximal subgroups”, *J. Austral. Math. Soc.*, **6**:4 (1966), 466–469.

[8] R. K. Agrawal, “Generalized center and hypercenter of a finite group”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **58** (1976), 13–21.

[9] Л. Я. Поляков, “Конечные группы с перестановочными подгруппами”, *Конечные группы*, Наука и техника, Минск, 1966, 75–88.

[10] X. Y. Guo, K. P. Shum, “Cover-avoidance properties and the structure of finite groups”, *J. Pure Appl. Algebra*, **181**:2–3 (2003), 297–308.

[11] Li Shirong, “Finite non-nilpotent groups all of whose second maximal subgroups are TI-groups”, *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, **100A**:1 (2000), 65–71.

[12] W. Guo, K. P. Shum, A. N. Skiba, “X-semipermutable subgroups of finite groups”, *J. Algebra*, **315**:1 (2007), 31–41.

[13] Baojun Li, A. N. Skiba, “New characterizations of finite supersoluble groups”, *Sci. China Ser. A*, **51**:5 (2008), 827–841.

[14] W. Guo, H. V. Legchekova, A. N. Skiba, “On finite groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups”, *Comm. Algebra* (to appear).

[15] W. Guo, H. V. Legchekova, A. N. Skiba, *On finite groups in which every 2-maximal subgroup permutes with all 3-maximal subgroups*, Препринт № 10, Гомель, Гомельский гос. ун-т им. Франциска Скорины, 2008.

[16] А. Н. Скиба, “H-permutable subgroups”, *Изв. Гомельск. гос. ун-та им. Ф. Скорины*, 2003, № 4, 37–39.

[17] Л. А. Шеметков, *Формации конечных групп*, Современная алгебра, Наука, М., 1978.

[18] B. Huppert, *Endliche Gruppen. I*, Grundlehren Math. Wiss., **134**, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1967.

[19] В. С. Монахов, *Введение в теорию конечных групп и их классов*, Вышейшая школа, Минск, 2006.

Го Вэньбинь
Суйджойский педагогический университет, Китай
E-mail: wbguo@xznu.edu.cn

Поступило
11.09.2008
Исправленный вариант
08.01.2009

Е. В. Легчекова
Белорусский торгово-экономический университет
потребительской кооперации
E-mail: e.legchekova@tut.by

А. Н. Скиба
Гомельский государственный университет им. Франциска
Скорины
E-mail: alexander.skiba49@gmail.com