

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ
В РОБОТОТЕХНИКЕ И МЕХАТРОНИКЕ**

УДК 539.3: 621.8

DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2023_10_71

**ВЛИЯНИЕ РАСПОЛОЖЕНИЯ ВОЛОКОН НА ПАРАМЕТРЫ КОНТАКТА
И ИЗНОСА ДЛЯ ЗУБЬЕВ ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧ ИЗ КОМПОЗИТОВ**

В.В. Можаровский¹, Д.С. Кузьменков², Ю.В. Василевич³, С.В. Киргинцева⁴

^{1,2,4}Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины, Гомель, Беларусь,

³Белорусский национальный технический университет, Минск, Беларусь

¹mozh@gsu.by, ²kuzmenkov@gsu.by, ³vasilevich@mail.ru, ⁴kirgintseva.s@mail.ru

Аннотация. Рассматривается задача о влиянии расположения волокон в зубьях зубчатого колеса из композита на параметры контакта, предложен алгоритм и методика расчета параметров контакта зубьев из композита. Применяя теорию упругости анизотропного тела, строится математическая модель расчета и методика обработки для линейного износа зубьев из композита в зависимости от расположения волокон в зубе из композита.

Ключевые слова: зубчатое колесо, композит, износ, зона контакта, ортотропия.

**INFLUENCE OF FIBER ARRANGEMENT FOR CONTACT AND
WEAR PARAMETERS FOR GEAR TEETH MADE OF COMPOSITES**

V.V. Mozharovsky¹, D.S. Kuzmenkov², Yu.V. Vasilevich³, S.V. Kirhintseva⁴

^{1,2,4}F. Scorina Gomel State University, Gomel, Belarus

³Belarusian National Technical University, Minsk, Belarus

¹mozh@gsu.by, ²kuzmenkov@gsu.by, ³vasilevich@mail.ru, ⁴kirgintseva.s@mail.ru

Abstract. The problem of the influence of the arrangement of fibers in the teeth of a gear made of a composite is considered, an algorithm and methods for calculating the contact parameters of teeth made of a composite are proposed. Using the theory of elasticity of an anisotropic body, a mathematical calculation model and processing technique are constructed for linear wear of composite teeth depending on the arrangement of fibers in the composite tooth.

Keywords: gear, composite, wear, contact zone, orthotropy.

Для цитирования: Можаровский В.В., Кузьменков Д.С., Василевич Ю.В., Киргинцева С.В. Влияние расположения волокон на параметры контакта и износа для зубьев зубчатых передач из композитов // Математические методы в технологиях и технике. 2023. № 10. С. 71-75. DOI 10.52348/2712-8873_MMTT_2023_10_71.

Введение. В инженерной практике для изготовления зубчатых колес применяются композиционные материалы, которые армированы волокнами, т.е. композиты, обладающие хорошими механическими свойствами: малый удельный вес, высокие динамические свойства, низкие коэффициенты трения. Расчет давлений для зубчатых передач при контактном взаимодействии в основном, построен на изотропных материалах, но современные волокнистые композиты имеют выраженную анизотропию механических свойств. Эти особенности необходимо учитывать при расчете на контактную прочность и износ, при конструировании зубчатых передач из композитов.

В настоящей работе создана математическая модель, которая применяется при разработке алгоритма инженерного расчета давления и износа при контактном взаимодействии для системы «зуб из композита – стальной зуб» на основе математической теории упругости анизотропного тела. Следует отметить, что при использовании волокнистых композитов в качестве материала для зуба из композита в зубчатом колесе предлагается расположить волокна тремя способами: перпендикулярно, параллельно и радиально оси цилиндра (см. табл. 1). Для определения контактных параметров (давление, зона контакта, напряжений и т.д.) при взаимодействии рассматриваемой системы можно использовать модифицированное решение типа Г. Герца для случая внешнего касания цилиндров при малых зонах

контакта [1]. Рассмотрим композиционный материал, армированный волокнами, которые ориентированы в направлении одной из осей X или Y (координатные оси совпадают с основными направлениями волокон материала).

Математическая модель расчета контактных параметров для зубчатых колес из волокнистых композитов. Представим расчет напряженного состояния ортотропного тела, при взаимодействии металлического зуба зубчатого колеса с зубом из композита, подверженного воздействию поверхностного давления p , распределенного в соответствии с законом

$$p(x) = p_0 \sqrt{a^2 - x^2}, \quad p_0 = 2P / (L \pi a^2);$$

или согласно [1]

$$p(x) = M \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad (1)$$

где R_1 и R_2 – радиусы двух взаимодействующих тел цилиндров (мм); P и L – действующее усилие и длина цилиндра, $M = \left[((\beta_1 + \beta_2) S_{22})^{(1)} + ((\beta_1 + \beta_2) S_{22})^{(2)} \right]^{-1}$, индексы (1) и (2) характеризуют материалы двух взаимодействующих тел, величины $\beta_{1,2}$ для каждого цилиндра вычисляются по формулам [1]

$$\beta_{1,2} = \left\{ \sqrt{\frac{S_{66} + 2S_{12} \pm \sqrt{(S_{66} + 2S_{12})^2 - 4S_{11}S_{22}}}{2S_{11}}} \right\}^{-1} \quad (2)$$

где постоянные $S_{i,j}$ при плоской деформации определяются [1] выражениями:

$$S_{11} = (1 - \nu_{13}\nu_{31}) / E_1, \quad S_{12} = -(\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{31}) / E_1, \quad S_{22} = (1 - \nu_{32}\nu_{23}) / E_2, \quad S_{66} = 1 / G_{12},$$

индексы i, j технических постоянных материалов цилиндров (модуля упругости E (МПа), коэффициента Пуассона ν и модуля сдвига G (МПа)) характеризуют различные направления и вычисляются по зависимостям правила смесей, индексы f и m обозначают волокно и матрицу, соответственно; V – объемное содержание волокна в матрице материала; K_f, K_m – объемные модули упругости волокна и матрицы. Величина зоны контакта при сопряжении рассматриваемых упругих ортотропных тел определяется по формуле:

$$a = \sqrt{2 P R_1 R_2 / \pi M L (R_1 + R_2)}. \quad (3)$$

Методика расчета износа зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала. Для расчета износа зубчатого колеса из волокнистого материала необходимо рассмотреть механизм относительного проскальзывания. Методика расчета для колес из пластмасс хорошо известна, но для композитов необходима ее реализация [2]. Мерой относительного проскальзывания профилей зубьев является коэффициент скольжения зубьев λ , равный отношению скорости скольжения точек контакта зубьев к касательным составляющим скоростей точек сопряженных профилей: $\lambda = v_{ск} / v_{1,2}^r$.

Учитывая, что $v_1 = \omega_1 \rho_1$; $v_2 = \omega_2 \rho_2$, (см.[3]) коэффициент скольжения можно вычислить так: $\lambda_1 = \frac{\omega_1 \rho_1 - \omega_2 \rho_2}{\omega_2 \rho_2} = i_{1,2} \frac{\rho_1}{\rho_2} - 1$, где ρ_1, ρ_2 – радиусы кривизны зубьев 1-го и 2-го колеса, соответствующие радиусам взаимодействующих цилиндров R_1 и R_2 .

Таблица 1. Зависимости для определения модулей упругости и коэффициентов Пуассона (индексы 1, 2, 3 соответствуют x, y, z) волокнистых материалов при различном расположении волокон

Расчетная схема контакта зуба колеса из композита	Механические свойства
Перпендикулярное расположение волокон по отношению к оси цилиндра (схема контакта цилиндров) а)	$E_2 = E_m \frac{1+\eta V}{1-\eta V}, \quad E_1 = VE_f + (1-V)E_m, \quad E_3 = E_2,$ $\nu_{12} = V\nu_f + (1-V)\nu_m, \quad \nu_{31} = \nu_{21}, \quad \nu_{13} = \nu_{12},$ $\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}, \quad \nu_{23} = 1 - \nu_{21} - \frac{E_2}{3K}, \quad \nu_{32} = \nu_{23},$ $\nu_{13} = \frac{E_1}{E_3} \nu_{31}, \quad K_m = \frac{E_m}{3-6\nu_m}, \quad K_f = \frac{E_f}{3-6\nu_f},$ $K = \frac{K_f K_m}{VK_m + (1-V)K_f}, \quad \eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m},$
Радиальное расположение волокон по отношению к оси цилиндра. Здесь на схемах цифрами 1 и 2 обозначаются соответственно волокна и матрица б)	$E_2 = VE_f + (1-V)E_m, \quad E_1 = \frac{E_f E_m}{VE_m + (1-V)E_f},$ $E_3 = E_1, \quad \nu_{12} = V\nu_f + (1-V)\nu_m,$ $\nu_{13} = 1 - \nu_{12} - \frac{E_1}{3K}, \quad \nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}, \quad \nu_{32} = \nu_{12},$ $\nu_{23} = \nu_{21}, \quad \nu_{31} = \nu_{13}, \quad K_f = \frac{E_f}{3-6\nu_f}, \quad K_m = \frac{E_m}{3-6\nu_m},$ $K = \frac{K_f K_m}{VK_m + (1-V)K_f}, \quad G_{12} = G_m \frac{G_f(1+V) + G_m(1-V)}{G_f(1-V) + G_m(1+V)}$
Параллельное расположение волокон по отношению к оси цилиндра в)	$E_3 = VE_f + (1-V)E_m, \quad E_1 = \frac{E_f E_m}{VE_m + (1-V)E_f},$ $E_2 = E_1, \quad \nu_{31} = V\nu_f + (1-V)\nu_m, \quad \nu_{32} = \frac{E_3}{E_2} \nu_{23},$ $\nu_{12} = 1 - \nu_{13} - \frac{E_1}{3K}, \quad \nu_{23} = \nu_{13}, \quad K_f = \frac{E_f}{3-6\nu_f},$ $K_m = \frac{E_m}{3-6\nu_m}, \quad K = \frac{K_f K_m}{\nu K_m + (1-\nu)K_f}, \quad \eta = \frac{E_f - E_m}{E_f + E_m},$ $G_{12} = \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})},$

При вычислении значений (см. [3]) «коэффициентов λ_1 и λ_2 для различных по размеру колес следует учитывать, что зубья большего колеса зацепляются в i раз меньше, чем зубья меньшего колеса».

По аналогии с однородными материалами для колес, как отмечено в [3] (стр. 387), «коэффициенты скольжения λ_1 и λ_2 возрастают с увеличением расстояния точки зацепления от полюса и уменьшением радиусов кривизны профилей. В крайних точках

и теоретической линии зацепления радиусы кривизны равны нулю и коэффициенты обращаются в ∞ . Поэтому, чтобы избежать большого относительного скольжения профилей и уменьшить их износ, линия зацепления располагается в зоне относительно малых λ . Используя методику Ю.Н. Дроздова, произведем расчет зубьев на износ на основе использования безразмерной характеристики износа I_h . Наиболее опасным является износ ножки зуба, поэтому в расчет целесообразно закладывать параметры, относящиеся к ножке зуба, хотя в общем случае можно рассчитывать всю поверхность зуба. За одно зацепление величину проскальзывания (путь трения скольжения S) в пределах площадки касания зубьев можно выразить соотношением» такой механизм выполняются и для композитов [1, 3]:

$$S = 2a\lambda, \quad a = \sqrt{\frac{2PR}{\pi ML}} \quad (4)$$

где a – полуширина площадки контакта; P – нагрузка; R – приведенный радиус колес; параметр M вычисляется для трех случаев расположения волокон: продольного (а); поперечного (б); нормального (в) (по схеме из табл. 1).

Таким образом, имея аналитические зависимости, определяющие физические параметры материала, т.е. модули упругости через объемное содержание волокна в матрице композита, можем перейти к решению. Аналогично строились модели для волокон, расположенных под углом. Описанные модели применяются к расчетам контактирующих волокнистых тел. Тогда общий путь трения за время службы передачи $L_h = Sntz_s$, где n – число оборотов колеса; t – время работы колеса; z_s – число пар зацепления с рассматриваемым зубчатым колесом. Толщина изношенного слоя равна

$$h = I_h L_h = I_h Sntz_s \leq [h_I]. \quad (5)$$

Преобразуя формулу (5) с учетом соотношения (4), получим формулу для расчета толщины изношенного слоя: $h_I = 2a\lambda ntz_s I_h$.

Алгоритм расчета износа зуба зубчатого колеса.

1. Рассчитываются координаты характерных точек зуба: вершины, начала и конца однопарного зацепления, полюса, конца активного участка линии зацепления: $x = R \cos \beta$; $y = R \sin \beta$.

Радиус R вычисляется для характерных точек: впадины, галтели, вершины.

$$R_{\text{вн}} = \frac{z_2}{2} - \frac{f_0}{c_0}, \quad R_{\text{гал}} = \sqrt{x_{\text{гал}}^2 + y_{\text{гал}}^2}, \quad R_{\text{вер}} = \frac{z_2}{2} + f_0,$$

где z_2 – количество зубьев; f_0 – коэффициент высоты головки зуба; c_0 – коэффициент радиального зазора исходного контура инструмента; $x_{\text{гал}}, y_{\text{гал}}$ – координаты контура

зуба; $\beta = \frac{\pi}{2z_2} + \text{inv}\alpha_0 - \text{inv}\alpha$ – угол профиля.

2. Для трех случаев расположения волокон: продольного, поперечного и нормального рассчитывается полуширина площадки контакта a .

3. Для каждого типа материала определяется величина износа h_I . I_h – безразмерная характеристика износа (вычисляется из эксперимента).

Для иллюстрации методики расчета износа по разработанной методике для выбранных значений параметров материала, зуба и параметров контакта зубьев зубчатого колеса из волокнистого композиционного материала в зависимости от расположения волокон на рис. 1 представлен наглядный пример.

Расчетный пример. Рассмотрим пример расчета износа зубьев колеса из волокнистого композита со следующими данными: $E_f = 210 \text{ ГПа}$; $G_f = 83 \text{ ГПа}$; $\nu_f = 0.27$;

$E_m = 70 \text{ ГПа}$; $G_m = 26 \text{ ГПа}$; $\nu_m = 0.34$; $P = 1 \text{ Н}$; $E = 210 \text{ ГПа}$; $\nu = 0.27$; $K = 0.22$; $I_h = 4 \cdot 10^{-7}$; $t = 2000 \text{ час}$; $n = 2$; $z = 2$; $iN_1 = 219 \text{ об/мин}$; $iN_2 = 219 \text{ об/мин}$.

На рис. 1 показан профиль зуба зубчатого колеса величина износа (линейная) в зависимости от расположения волокон: продольное расположение; нормальное расположение; поперечное расположение. Из анализа результатов следует, что максимальный износ наблюдается в случае продольного расположения волокон.

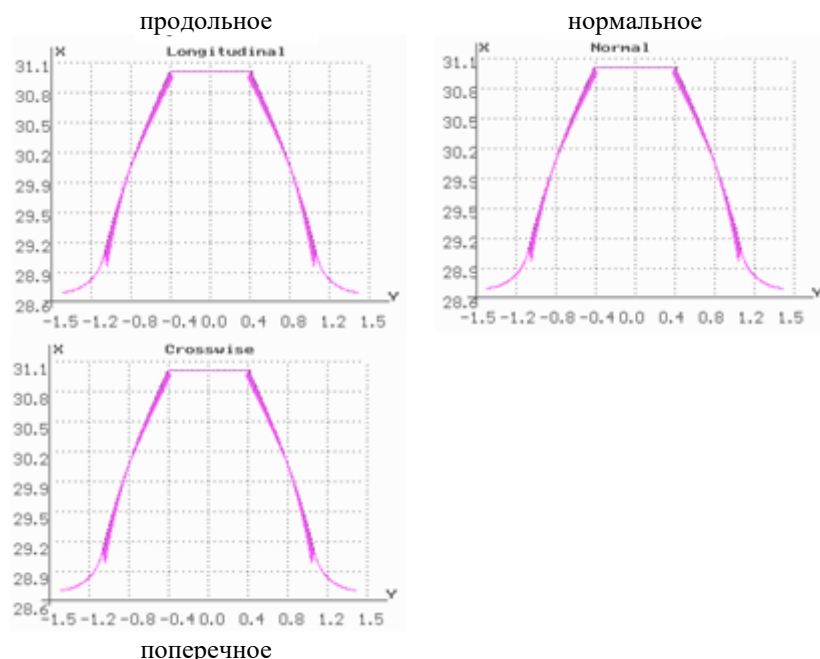


Рис. 1. Графическая интерпретация износа зуба для расчетного примера

Заключение.

1. Построенный приближенный алгоритм расчета давления и зоны контакта в зависимости от расположения и состава волокон в зубе из композита зубчатой передаче дает возможность учитывать и давать оценку о влиянии их на контактное давление и зону контакта и износ.

2. Анализ графических зависимостей примера показал, что расположение волокон, в рассмотренном случае, незначительно влияет на износ, но максимальный износ наблюдается в случае продольного расположения волокон.

Библиографический список

1. Можаровский В.В., Старжинский В.Е. Прикладная механика слоистых тел из композитов. Минск. Наука и техника. 1988. 280 с.
2. Можаровский В.В., Киргинцева С.В., Кузьменков Д.С., Москалева М.В. Реализация расчета износа зубьев зубчатых колес с учетом их конструктивных параметров // Международная научно-техническая конференция «Полимерные композиты и трибология» (ПОЛИКОМТРИБ-2022), посвященная 100-летию со дня рождения академика В.А. Белого, Гомель, 28-30 июня 2022 г. Институт механики металлополимерных систем имени В.А. Белого Национальной Академии Наук Беларуси. Гомель. 2022. С. 149.
3. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчетов на трение и износ. Москва. Машиностроение. 1977. 526с.