УДК 629.113:539.621

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ КАЧЕНИЮ АВТОМОБИЛЬНЫХ ШИН В ЗАВИСИМОСТИ ОТ УСЛОВИЙ ЭКСПЛУАТАЦИИ. ЧАСТЬ 1. МЕТОДИКА МНОГОФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА

В. В. МОЖАРОВСКИЙ[а,б], С. В. ШИЛЬКО[а+], С. Б. АНФИНОГЕНОВ[а], А. В. ХОТЬКО[а]

Разработана методика оптимального планирования эксперимента для определения сопротивления качению автомобильных шин. Методика основана на математической модели с использованием уравнения регрессии 2-го порядка. Регрессионный анализ результатов испытаний серийно выпускаемых шин, в которых изменялись внешние факторы (давление в шине, нагрузка и скорость качения), выявил существенно нелинейную зависимость коэффициента сопротивления качению от нагрузки.

Ключевые слова: сопротивление качению, автомобильная шина, многофакторный эксперимент, уравнение регрессии.

Введение. Энергетические потери в колесных движителях, например, в автомобильных шинах вследствие диссипации при циклическом объемном деформировании вязкоупругих материалов и проскальзывания в контакте с дорожным покрытием характеризуются коэффициентом сопротивления качению f. Сопротивление качению шины зависит от внутренних и внешних факторов, которые изменяются в широких пределах, причем часть из них взаимосвязаны [1]. К внутренним факторам можно отнести распределение материала в шине (объемное соотношение резиновых смесей и корда), направление армирования, рисунок протектора, отношение высоты профиля к ширине протектора, геометрию боковины. Внешними факторами являются нагрузка, скорость качения, давление воздуха в шине, ширина и диаметр обода. Так как расчетные методы пока не позволяют в полной мере описать сложный профиль протектора шины, ее слоистую структуру, а также анизотропию слоев и нелинейность деформационных характеристик материала шины в виде резинокордного композита [2], сопротивление качению натурных образцов обычно определяют экспериментальным путем.

Цель работы — разработка методики оптимального планирования эксперимента для определения сопротивления качению автомобильных шин.

Постановка задачи. В данной работе предлагается методика построения опытов по принципу многофакторного планирования [3]. Для получения адекватного феноменологического описания и рационального проведения испытаний по определению зависимости коэффициента сопротивления качению от внутренних и внешних факторов целесообразно использовать теорию многофакторного эксперимента [4—7].

Внутреннее давление p, нагрузка Q и скорость качения v при эксплуатации шин изменяются в достаточно широких пределах и существенно влияют на коэффициент сопротивления качению f [1]. Для получения феноменологической модели требуется определить зависимость $f(p, Q, v)$ по результатам трибоиспытаний натурных образцов.

а Институт механики металлополимерных систем им. В. А. Белого НАН Беларуси. Беларусь, 246050, г. Гомель, ул. Кирова, 32а.
б Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины. Беларусь, 246050, г. Гомель, ул. Советская, 104.
\+ Автор, с которым следует вести переписку.

Введем обозначения вышеуказанных факторов в безразмерных единицах $p = x_1$, $Q = x_2$, $v = x_3$ и проведем их нормализацию:

$$x_j = \frac{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j0}}{\Delta x_j}.$$

Методика экспериментального исследования. Для проведения испытаний применяли стенд центральной заводской лаборатории ОАО "Белшина" с наружным диаметром стального барабана 1,7 м ± 1%, обеспечивающий скорость качения шины по барабану до 300 км/ч. В качестве образца была использована шина 175/70R13 модели "Бел-100", посаженная на обод. Регистрирующее устройство стенда позволяет измерять продольную силу, крутящий момент и мощность привода. Относительная погрешность измерения продольной силы ± 1%.

Измерение давления воздуха в шине проводилось манометром. Для проведения испытания применялся обод со стандартными размерами. Биение обода на участках прилегания к шине не превышало: радиальное — 0,8 мм, боковое — 1,2 мм. По истечении времени обкатки осуществлялась регистрация продольной силы и крутящего момента при вращении шины, прижатой к барабану усилием 50 Н. Затем по полученным зависимостям рассчитывался коэффициент сопротивления качению шины.

Методика решения задачи. На основе теории многофакторного планирования эксперимента строится алгоритм определения коэффициента сопротивления качению.

На первом этапе исследования проводится полный факторный эксперимент типа 2^3. Уровни факторов и интервалы варьирования выбраны по результатам предварительно полученных экспериментальных данных. Факторы, уровни и интервалы варьирования факторов приведены в табл. 1.

Таблица 1. Уровни и интервалы варьирования факторов

Факторы	Уровни			Интервалы варьирования
	верхний (+1)	основной (0)	нижний (–1)	
x_1 — давление в шине (p, 10^5 Па)	2,5	2	1,5	0,5
x_2 — нагрузка на шину (Н)	3700	2700	1700	1000
x_3 — скорость (км/ч)	100	80	60	20

Строится уравнение регрессии для полного факторного эксперимента, заданного таблицей значений (здесь введены безразмерные величины: "+" — это 1, а "–" — это –1).

Коэффициенты уравнения регрессии определялись по формулам регрессионного анализа [4]:

$$b_0 = 0{,}00894;\ b_1 = -0{,}00126;\ b_2 = -0{,}0002225;\ b_3 = 0{,}003497;\ b_{12} = -0{,}001272;$$

$$b_{13} = -0{,}001802;\ b_{23} = 0{,}000535;\ b_{123} = -0{,}000715.$$

Таблица 2. План эксперимента типа 2^3

Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	$y_{эк}$	$f = \bar{y}$ (расчетные значения)
1	+	–	–	–	+	+	+	–	0,0051	0,0051
2	+	+	–	–	–	–	+	+	0,0073	0,0073
3	+	–	+	–	–	+	–	+	0,0047	0,0047
4	+	+	+	–	+	–	–	–	0,00467	0,00467
5	+	–	–	+	+	–	–	+	0,0132	0,0132
6	+	+	–	+	–	+	–	–	0,01105	0,01105
7	+	–	+	+	–	–	+	–	0,0178	0,0178
8	+	+	+	+	+	+	+	+	0,0077	0,0077

$x_0 = 1$ — фактор при нулевом коэффициенте уравнения регрессии.

Уравнение регрессии имеет вид:

$$y = 0{,}00894 - 0{,}00126x_1 - 0{,}0002225x_2 + 0{,}003497x_3 - 0{,}001272x_1x_2 - 0{,}001802x_1x_3 +$$
$$+ 0{,}000535x_2x_3 - 0{,}000715x_1x_2x_3. \qquad (1)$$

В табл. 2 приведены значения коэффициента сопротивления качению $f = \bar{y}$, рассчитанные по полученному уравнению регрессии. Видно, что результаты расчета согласуются с экспериментальными данными. Для проверки адекватности модели необходимо знать дисперсию воспроизводимости эксперимента и иметь результаты эксперимента в нулевых точках, т. е. на основном уровне (не менее 6 опытов). Опыты проводятся для определенного типа шин.

Для проверки адекватности полученного уравнения и определения дисперсий коэффициентов находим результаты шести опытов, поставленных в центре плана (табл. 3).

Таблица 3. Результаты опытов в центре плана

Содержание плана	Номер опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y
Опыты в центре плана	1	+	0	0	0	0	0	0	0,00416
	2	+	0	0	0	0	0	0	0,0039
	3	+	0	0	0	0	0	0	0,0034
	4	+	0	0	0	0	0	0	0,003
	5	+	0	0	0	0	0	0	0,0046
	6	+	0	0	0	0	0	0	0,0032

Находим параметр оптимизации $\bar{y}$ в центре плана

$$\bar{y} = \frac{1}{n_0}\sum_{u=1}^{n_0=6} y_u = 0{,}00371$$

и дисперсию s_y^2 воспроизводимости эксперимента:

$$s_y^2 = \frac{1}{n_0 - 1}\sum_{u=1}^{n_0=6}(y_u - \bar{y})^2 = 3{,}782 \cdot 10^{-7},$$

сравниваем с разностью между средним арифметическим значением параметра оптимизации $\bar{y}$ в центре плана и величиной свободного члена b_0:

$$|\,\bar{y} - b_0| = |0{,}00371 - 0{,}00894| = 0{,}00523.$$

Так как полученная разность во много раз превышает ошибку s_y эксперимента

$$s_y = +\sqrt{s_y^2} = 0{,}0006149796744,$$

то можно заключить, что коэффициенты при квадратичных членах значимо отличаются от нуля, а исследуемая зависимость не может быть с достаточной точностью аппроксимирована уравнением (1). То есть линейная модель недостаточно адекватна, т. к. не определяет адекватно коэффициент сопротивления качению в нулевых точках, поэтому целесообразно привлечь для определения f во всех остальных точках нелинейную (квадратичную) модель.

Рассмотрим модель 2-го порядка, считая, что эксперимент полностью проведен в нулевых и “звездных” точках (для полноты описания некоторые значения результатов в этих точках были получены с помощью экстраполяции и интерполяции).

При планировании второго порядка функция отклика аппроксимируется полиномом 2-го порядка:

$$y = b_0 + \sum_{i=1}^{N} b_i x_i + \sum_{i=1}^{N} b_{il} x_i x_l + \sum_{i=1}^{N} b_{ii} x_i^2 .$$

Используя известную методику построения математической модели [5, 6], экспериментальные результаты обрабатываются по следующему плану.

1. Выполняются опыты в “звездных” точках и определяются коэффициенты полинома 2-го порядка по формулам:

$$b_0 = \frac{A}{N}\left[2\lambda^2(k+2)\sum_{j=1}^{N} y_j - 2\lambda c \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j\right];\; b_i = \frac{c}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j \;;\; b_{ii} = \frac{c^2}{N\lambda}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j \;;$$

$$b_{ii} = \frac{A}{N}\left\{c^2(k+2)\lambda - k\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j + c^2(1-\lambda)\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}^2 y_j - 2\lambda c \sum_{j=1}^{N} y_j\right\},$$

где $\lambda \le 1$ (выбирается по методике [5]).

Таблица 4. Результаты опытов в “звездных” точках

Содержание плана	№ опыта	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1^2	x_2^2	x_3^2	y
Опыты в “звездных” точках	7	+	–1,682	0	0	2,828	0	0	0,0098
	8	+	+1,682	0	0	2,828	0	0	0,00505
	9	+	0	–1,682	0	0	2,828	0	0,0066
	10	+	0	+1,682	0	0	2,828	0	0,00537
	11	+	0	0	–1,682	0	0	2,828	0,0056
	12	+	0	0	+1,682	0	0	2,828	0,0149

2. После подстановки значений коэффициентов в уравнение регрессии получаем:

$$\begin{aligned} Y &= 0{,}003675 - 0{,}001323x_1 - 0{,}0002818x_2 + 0{,}003194x_3 - 0{,}001273x_1x_2 - 0{,}001804x_1x_3 + \\ &+ 0{,}0005353x_2x_3 - 0{,}0007155x_1x_2x_3 + 0{,}001486x_1^2 + 0{,}0009769x_2^2 + 0{,}002486x_3^2. \end{aligned} \tag{2}$$

3. Вычисляем доверительные интервалы для коэффициентов:

$$\Delta b_0 = \pm ts\{b_0\} = \pm 2{,}57 \cdot 6{,}303 \cdot 10^{-8} = 0{,}0006452;\; \Delta b_i = \pm ts\{b_i\} = \pm 0{,}0004277;$$

$$\Delta b_{il} = \pm ts\{b_{il}\} = \pm 0{,}000559;\;\; \Delta b_{ii} = \pm ts\{b_{ii}\} = \pm 0{,}0004166,$$

где i, j — факторы ($i = 1, ..., k;\; j = 1, ..., N$).

В связи с тем, что коэффициенты b_2, b_{23} по абсолютной величине меньше соответствующих доверительных интервалов, их можно признать статистически незначимыми и исключить из уравнения регрессии. Таким образом, математическая модель, полученная при ротатабельном планировании второго порядка, принимает вид:

$$\begin{aligned} Y &= 0{,}003675 - 0{,}001323x_1 + 0{,}003194x_3 - 0{,}001273x_1x_2 - 0{,}001804x_1x_3 - 0{,}0007155x_1x_2x_3 + \\ &+ 0{,}001486x_1^2 + 0{,}0009769x_2^2 + 0{,}002486x_3^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Для проверки адекватности модели (3) определяем дисперсию S_{ad}^2 адекватности по формуле:

$$S_{ad}^2 = \frac{S_R - S_E}{N - k' - (n_0 - 1)},$$

где k' — число статистически значимых коэффициентов регрессии; $f = N - k' - (n_0 - 1)$ — число степеней свободы. Остаточные суммы квадратов $S_R = \sum_{j=1}^{N}\left(y_j - \bar{y}_j\right)^2$ и $S_E = \sum_{u=1}^{n_0}(y_u - \bar{y})^2$ необходимы для нахождения расчетного значения F-критерия Фишера:

$$F_P = \frac{S_{ad}^2}{S_y^2} = 2{,}26194\,.$$

При уровне значимости 5% и числе степеней свободы в числителе, равном 10, и знаменателе, равном 5, табличное значение критерия равно 4,74 и $F_P < F_T$ (F_T — критерий Фишера табличный, заданного уровня значимости). Следовательно, модель (3) следует признать адекватной.

Кодированные значения факторов связаны с натуральными значениями следующими зависимостями:

$$x_1 = \frac{p - p_0}{\Delta p},\ \ x_2 = \frac{Q - Q_0}{\Delta Q},\ \ x_3 = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta \nu}\,,$$

где p_0, Q_0, v_0 — основные уровни факторов в натуральных выражениях; Δp, ΔQ, Δv — интервалы варьирования. Уравнение для расчета коэффициента сопротивления качению в натуральных единицах определяем по зависимости (3) при соответствующей подстановке:

$$f = 0{,}003675 - 0{,}001323\left(\frac{p-2}{0{,}5}\right) + 0{,}003194\left(\frac{\nu-80}{20}\right) - 0{,}001273\left(\frac{p-2}{0{,}5}\right)\left(\frac{Q-2700}{1000}\right) -$$
$$- 0{,}001804\left(\frac{p-2}{0{,}5}\right)\left(\frac{\nu-80}{20}\right) - 0{,}0007155\left(\frac{p-2}{0{,}5}\right)\left(\frac{Q-2700}{1000}\right)\left(\frac{\nu-80}{20}\right) + 0{,}001486\left(\frac{p-2}{0{,}5}\right)^2 +$$
$$+ 0{,}0009769\left(\frac{Q-2700}{1000}\right)^2 + 0{,}002486\left(\frac{\nu-80}{20}\right)^2.$$

Пример расчета и анализ результатов. Используя математическую модель в виде регрессионного уравнения, можно оценить влияние исследуемых факторов на коэффициент сопротивления качению f. Так, на рис. 1 представлена зависимость f от скорости при условии, что остальные факторы постоянны.

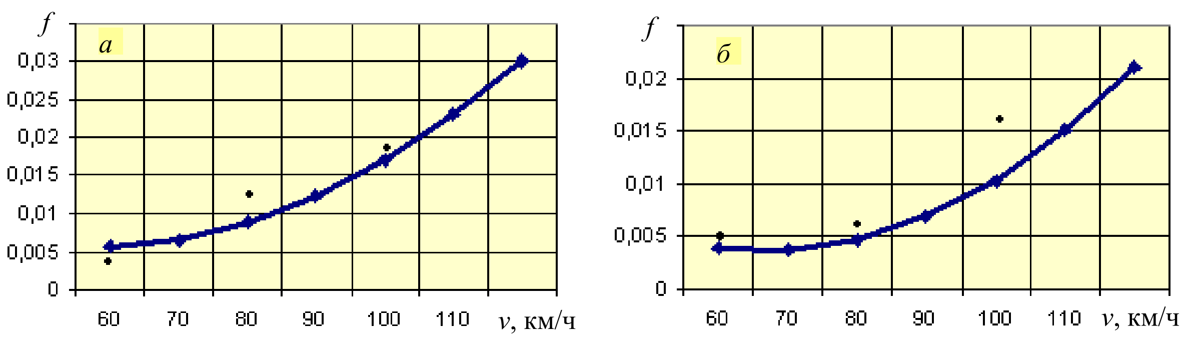

Рис. 1. Влияние скорости на коэффициент сопротивления качению:
а — $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ МПа; $Q = 3700$ Н; *б* — $p = 2 \cdot 10^5$ МПа, $Q = 3700$ Н; точки — экспериментальные значения

Из рисунка видно, что f мало изменяется при малых скоростях (до 100 км/ч) и резко повышается при высоких скоростях. Кроме того, при очень малых скоростях f может даже незначительно возрастать. Такой характер изменения коэффициента сопротивления качению подтверждают и результаты, приведенные в работе [1].

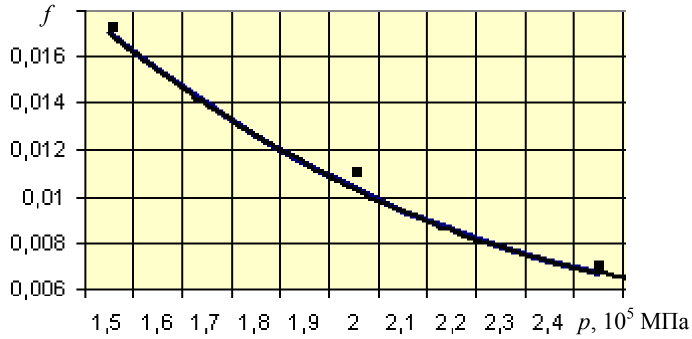

Рис. 2. Влияние давления на коэффициент сопротивления качению:
v = 100 км/ч, Q = 3700 Н; точки — экспериментальные значения

На рис. 2 показано влияние давления воздуха в шине на коэффициент сопротивления f. Увеличение давления приводит к снижению f, что объясняется возрастанием жесткости шины. Зависимость f от давления в шине имеет практически линейный характер и наблюдается его плавное снижение с увеличением давления, что согласно работе [1], соответствует рациональной конструкции.

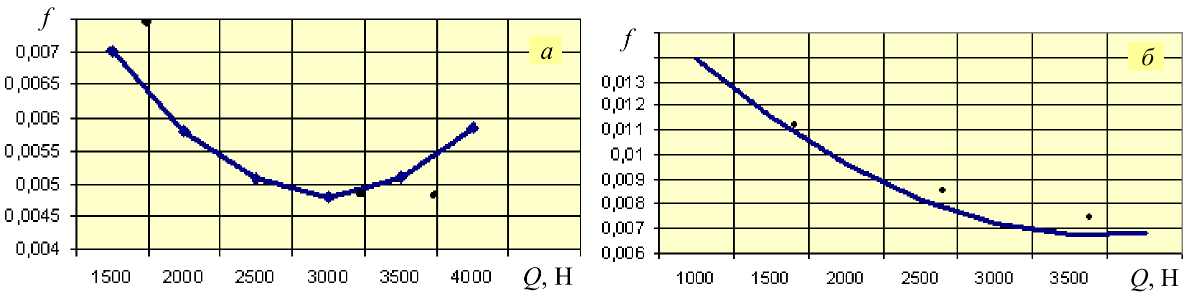

Рис. 3. Влияние нагрузки на коэффициент сопротивления качению:
а — $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ МПа, v = 60 км/ч; *б* — $p = 2{,}5 \cdot 10^5$ МПа, v = 100 км/ч; точки — экспериментальные значения

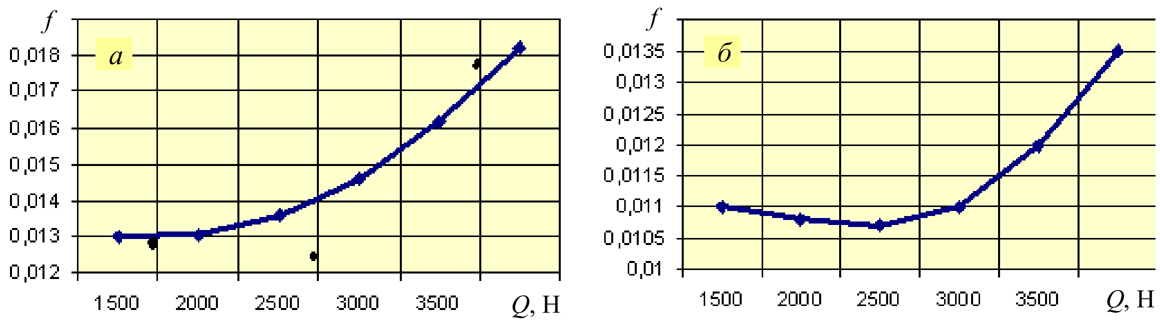

Рис. 4. Влияние нагрузки на коэффициент сопротивления качению:
а — $p = 1{,}5 \cdot 10^5$ МПа; v = 100 км/ч; *б* — $p = 1{,}8 \cdot 10^5$ МПа; v = 100 км/ч; точки — экспериментальные значения

Оценка влияния действующей нагрузки на коэффициент сопротивления качению представлена на рис. 3, 4. Из приведенных зависимостей можно сделать заключение о неоднозначном влиянии нагрузки на сопротивление качению в зависимости от скорости и давления в шине. Из анализа уравнения (3) следует, что нагрузка незначительно влияет на f. Для рассматриваемого случая нагрузка на колесо входит в уравнение (3) как квадратичный член с очень малым коэффициентом при нем и как фактор взаимодействия (в основном, с давлением). При изменении нагрузки в пределах 1500—3700 Н коэффициент сопротивления качению практически постоянен (см. рис. 3 и 4), что соответствует выводам работы [1]. Повышение нагрузки выше указанного диапазона, с одной стороны, ведет к понижению коэффициента сопротивления качению (для высоких давлений в шине), с другой стороны — к его росту (для низких давлений в шине) (рис. 4). Такое изменение можно объяснить, учитывая вклад факторов, влияющих на расход энергии на сопротивление качению, и нагрузки ($f = \frac{N_f}{Qv}$).

Заключение. Разработана методика оптимального планирования эксперимента для описания сопротивления качению автомобильных шин, основанная на математической модели с использованием уравнения регрессии 2-го порядка.

Регрессионный анализ результатов испытаний массовых шин, в которых варьировались внешние факторы (давление в шине, нагрузка и скорость качения), выявил нелинейную зависимость коэффициента сопротивления качению от нагрузки и скорости.

Обозначения

$\tilde{x}^0$ — натуральное значение фактора для основного уровня; $\tilde{x}$ — натуральное значение фактора; $\Delta\tilde{x}_i = \frac{\tilde{x}_{i\,\max} - \tilde{x}_{i\,\min}}{2}$ — интервал варьирования; x_j — кодированные значения факторов; $y_{эк}$ — экспериментальные значения коэффициента сопротивления качению; Q — нормальная нагрузка на колесо; p — внутреннее давление в шине; v — скорость вращения колеса; $f = \bar{y}$ — значения коэффициента сопротивления качению, рассчитанные по уравнению регрессии; j, l = 1, 2, ..., n — номер фактора; N — число опытов в матрице планирования; N_f — мощность, расходуемая на сопротивление качению.

Литература

1. **Кнороз В. И., Кленников Е. В., Петров И. П. и др.** Работа автомобильной шины. — М.: Транспорт. — 1976
2. **Шилько С. В., Черноус Д. А., Анфиногенов С. Б., Хотько А. В.** Автомобильные шины: задачи механики и трибологии // Тез. докл. междунар. науч.-техн. конф. “Поликомтриб-2005”. — Гомель. — 2005, 128—130
3. **Рыбалко И. В., Можаровский В. В.** Определение коэффициента сцепления протектора шины с покрытием дороги // Тез. докл. IX Респуб. науч. конф. студентов и аспирантов “Новые математические методы и компьютерные технологии в проектировании, производстве и научных исследованиях”. — Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины. — 2006, 109—110
4. **Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В.** Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. — М.: Наука. — 1976
5. **Красовский Г. И., Филаретов Г. Ф.** Планирование эксперимента. — М.: БГУ. — 1982
6. **Налимов В. В.** Теория эксперимента. — Минск: Наука. — 1971
7. **Спиридонов А. А.** Планирование эксперимента при исследовании технологических процессов. — М.: Машиностроение. — 1981

Поступила в редакцию 24.10.06.

Mozharovskii V. V., Shilko S. V., Anfinogenov S. B., and Khotko A. V. **Determination of resistance to rolling of tires in dependence on operating conditions. Part 1. Method of multifactorial experiment.**

The technique of optimal design of experiments for determining of the resistance to rolling of motor tires has been developed. It is based on the mathematical model involving the second-order regression equation. The regression analysis of the test results of mass tires for which the external factors (the pressure in the tire, the load, and the rolling velocity) varied shows the essentially nonlinear dependence of the coefficient of resistance to rolling on the load.