Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 519.4:517:513.88 *МАТЕМАТИКА*

С. М. ПОНОМАРЕВ

О СХОДИМОСТИ ПОЛУГРУПП

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 27 X 1971)

В этой статье мы вводим новые классы полугрупп $A^{n,\alpha}$ (n и α — фиксированные числа, $n = 0, 1, 2, \ldots$; $0 \leqslant \alpha < 1$) и даем теоремы, которые полностью списывают производящие операторы этих полугрупп.

Основная теорема решает проблему о сходимости полугрупп, которую поставил Троттер в ([1]) для класса $A^{0,\alpha}$.

1. Несколько фактов из теории полугрупп операторов в банаховом пространстве $\mathfrak{X}$. Пусть полугруппа $T(t)$ сильно измерима на $(0, \infty)$. Для каждой такой полугруппы существует предел

$$\omega_0 = \lim_{t\to\infty} \frac{\ln \| T(t) \|}{t},$$

который называется типом полугруппы. Равенство

$$A_0 x = \lim_{t\to 0+} \frac{T(t)x - x}{t}$$

определяет инфинитезимальный оператор полугруппы; если оператор A_0 допускает замыкание, то говорят, что полугруппа обладает производящим оператором $A = \bar{A}_0$.

Определение 1. Будем говорить, что полугруппа $T(t)$ принадлежит классу $A^{0,\alpha}$, если

а) $T(t)$ принадлежит классу L (см. ([3]));

б) для резольвенты $R(\lambda; A)$ выполнено условие

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-\alpha} R(\lambda; A) x = x,$$

при любых $x \in \mathfrak{X}$ и $0 \leqslant \alpha < 1$.

Теорема 1. *Для любой полугруппы $T(t)$ класса $A^{0,\alpha}$ область определения $\mathcal{D}(A_0)$ инфинитезимального оператора A_0 плотна в $\mathfrak{X}$.*

Доказательство. Обозначим $\mathfrak{X}_\beta = T(\beta)[\mathfrak{X}]$ область значений преобразования $T(\beta)$, $\beta > 0$. Из определения 1 следует, что $T(t)$ сильно непрерывна при $t > 0$ и что $\mathfrak{X}_0 = \bigcup\limits_{0<\beta<\infty} \mathfrak{X}_\beta$ плотно в $\mathfrak{X}$. Поэтому, как следует из ([2]), Т. 10.3.1, $\mathcal{D}(A_0)$ плотно в $\mathfrak{X}$.

2. Не ограничивая общности, далее мы рассматриваем только полугруппы типа $\omega_0 < 0$.

Теорема 2. *Для того чтобы линейный замкнутый оператор U был производящим оператором полугруппы $T(t)$ класса $A^{0,\alpha}$, удовлетворяющей условию $\omega_0 < 0$, необходимы и достаточны условия:*

1) *$\mathcal{D}(U)$ плотно в $\mathfrak{X}$;*

2) $\|R(\lambda; U)\| = O(1/\lambda^{1-\alpha})$ *при* $\lambda \to \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1$;

3) $\|R(\lambda; U)\|$ *ограничено при* $\operatorname{Re}(\lambda) > 0$;

4) *существует множество H_0, плотное в $\mathfrak{X}$ и такое, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-\alpha} R(\lambda; U) x = x \quad \text{при} \quad x \in H_0;$$

5) *существует неотрицательная, невозрастающая функция* $\varphi(t)$ *типа* $\omega_0^* < 0$, *обладающая свойством, что для любого* $x \in \mathfrak{X}$ *существует неотрицательная измеримая функция* $\varphi(t, x) = \varphi(t)\|x\|$ *такая, что*

$$\int_0^\infty \varphi(t, x)\,dt < \infty \quad \text{и} \quad \| R^{(n)}(\lambda; U)x \| \leqslant \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, t^n \varphi(t, x)\,dt$$

для всех действительных $\lambda \geqslant 0$ *и целых* $n \geqslant 0$.

При этом $\|T(t)\| \leqslant \varphi(t)$ *для всех* $t > 0$.

3. Теперь о полугруппах классов $A^{n,\alpha}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

Определение 2. Будем говорить, что полугруппа $T(t)$ принадлежит классу $A^{n,\alpha}$, если

а) $T(t)$ принадлежит классу $L^{(n)}$ (см. ([4]));

б) для оператора $S_n(\lambda)$ (см. ([4])), определенного на $\mathfrak{X}$, выполнено условие

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-\alpha} S_n(\lambda)x = x, \quad 0 \leqslant \alpha < 1.$$

Пусть A — допускающий замыкание оператор, причем $\mathscr{D}(A^m)$ плотно в $\mathfrak{X}$ при любом $m = 0, 1, \ldots$ Определенную в некоторой области $\rho_n(A)$ комплексной плоскости аналитическую функцию со значениями в пространстве линейных непрерывных операторов, следуя работе ([4]), назовем резольвентой порядка n оператора A, если из $S_n(\lambda; A)x = 0$ $(\lambda \in \rho_n(A))$ следует $x = 0$ и если при $\lambda \in \rho_n(A)$

$$S_n(\lambda; A)Ax = AS_n(\lambda; A)x, \quad x \in \mathscr{D}(A),$$
$$S_n(\lambda; A)(\lambda I - A)^{n+1}x = x, \quad x \in \mathscr{D}(A^{n+1}).$$

Будем говорить, что оператор A принадлежит классу $L_*^{(n)}$, если $\rho_n(A) \supseteq \{\lambda;\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0\}$, причем $\|S_n(\lambda; A)\| \leqslant M$ $(\mathrm{Re}(\lambda) > 0)$, и если существуют такие неотрицательная и непрерывная по совокупности переменных функция $\varphi(t, x)$ $(x \in \mathfrak{X},\ t > 0)$ и неотрицательная ограниченная на любом промежутке вида (a, b), $0 < a < b$, функция $\varphi(t)$ $(t > 0)$, для которой $\overline{\lim_{t\to\infty}}\, t^{-1} \ln \varphi(t) < 0$, что

$$\varphi(t, x) \leqslant \varphi(t)\|x\|, \quad \int_0^\infty t^n \varphi(t, x)\,dt < \infty,$$

$$\| S_n^{(m)}(\lambda, A)x \| \leqslant \int_0^\infty \exp(-\lambda t)\, t^{n+m} \varphi(t, x)\,dt, \quad \mathrm{Re}(\lambda) \geqslant 0, \quad m = 0, 1, \ldots$$

Теорема 3. *Для того чтобы линейный оператор* A *был инфинитезимальным оператором полугруппы* $T(t)$ *класса* $A^{n,\alpha}$, *удовлетворяющей условию* $\omega_0 < 0$, *необходимы и достаточны условия*:

1) A *принадлежит классу* $L_*^{(n)}$;

2) $\|S_n(\lambda; A)\| = O(1/\lambda^{1-\alpha})$ *при* $\lambda \to \infty$, $0 \leqslant \alpha < 1$;

3) *существует множество* H_0, *плотное в* $\mathfrak{X}$ *и такое, что*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-\alpha} S_n(\lambda; A)x = x \quad \text{при} \quad x \in H_0.$$

При этом $\|T(t)\| \leqslant \varphi(t)$, $t > 0$.

4. Основная теорема. *Пусть* $\{T_n(t)\}$ — *последовательность* $A^{0,\alpha}$ *полугрупп, которая удовлетворяет условиям*:

I) *существует неотрицательная, неувеличивающаяся функция* $\psi(t)$ *типа* $\omega_0 < 0$ *такая, что* а) $\sup\limits_n \|T_n(t)\| \leqslant \psi(t)$ *для* $t > 0$, б) $\int\limits_0^\infty \psi(t)\,dt < \infty$, *существует положительное число* L *такое, что* в) $\sup\limits_n \|R(\lambda;\ A_n)\| \leqslant L$ *для* $\mathrm{Re}\,(\lambda) > 0$;

II) *существует замкнутый линейный оператор* A *и плотное подмножество* D, *содержащееся в областях* $\mathscr{D}(A_n)$, *для достаточно больших* n *такое, что*

а) *замкнутое ограничение* A *на* D *приравнивается к* A;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} A_n x = Ax$ *для* $x \in D$;

в) $\rho(A) \cap \{\lambda;\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0\} \neq \phi$;

III) $s - \lim\limits_{\lambda\to\infty} \lambda^{1-\alpha} R(\lambda; A_n) = I$, *где* $0 \leqslant \alpha < 1$ *равномерно по* n, s — *сильный предел.*

Тогда: 1) *оператор* A *генерирует полугруппу* $T(t)$ *класса* $A^{0,\alpha}$ *типа* $\omega_0 < 0$ и $R(\lambda_0) = R(\lambda_0;\ A)$ *для некоторого* λ_0 *с* $\mathrm{Re}\,(\lambda_0) > 0$;

2) $s - \lim\limits_{n\to\infty} T_n(t) = T(t)$ *для* $t > 0$.

Автор выражает благодарность проф. В. А. Ильину за внимание к данной работе.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. F. Trotter, Pacific J. Math., 8, 887 (1958). [2] Э. Хилле, Р. Филлипс, Функциональный анализ и полугруппы, М., 1962. [3] П. Забрейко, А. Зафиевский, Об одном классе полугрупп, ДАН, 189, № 5, 934 (1969). [4] А. Зафиевский, О полугруппах, имеющих суммирующие со степенным весом особенности в нуле, ДАН, 195, № 1, 24 (1970).