Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 1

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

Ш. К. ФОРМАНОВ

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В МНОГОМЕРНОЙ ПРЕДЕЛЬНОЙ ТЕОРЕМЕ ДЛЯ ОДНОРОДНЫХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 18 XI 1971)

Пусть Ω — некоторое множество точек ω, F_Ω — алгебра его подмножеств, $p(\omega, A)$, $\omega \in \Omega$, $A \in F_\Omega$,— функция вероятностей переходов. Предположим, что

$$\sup_{\omega,\bar\omega,A} |p(\omega, A) - p(\bar\omega, A)| = \rho < 1, \qquad (*)$$

$$\omega, \bar\omega \in \Omega, \quad A \in F_\Omega.$$

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — марковский процесс, определенный $p(\omega, A)$ и начальным распределением

$$\pi(A) = P(x_1 \in A), \quad f(\omega) = (f_1(\omega), f_2(\omega), \ldots, f_k(\omega)),$$

где $f_i(\omega)$, $i = 1, \ldots, k$, — F_Ω-измеримые действительные функции, определенные на Ω.

Будем считать, не ограничивая общности, что $M_p f_i(x_1) = 0$, $i = 1, \ldots, k$, где индекс p показывает, что усреднение производится по стационарному распределению, существование которого обеспечено условием $(*)$.

Предположим, что матрица $\Lambda = \|\sigma_{ij}\|_1^k$, где

$$\sigma_{ij} = M_p f_i(x_1) f_j(x_1) + \sum_{s=1}^{\infty} M_p f_i(x_1) f_j(x_{s+1}) + \sum_{s=1}^{\infty} M_p f_j(x_1) f_i(x_{s+1}),$$

положительно определена.

Положим

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=1}^{n+1} Bf(x_s), \quad P(A) = P(S_n \in A),$$

$$\Delta_n(A) = P_n(A) - \Phi(A),$$

где матрица B такая, что $B'B = \Lambda^{-1}$ (штрих обозначает операцию транспонирования), $\Phi(A)$ — k-мерная нормальная вероятностная функция с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей.

Пусть (x, y) — скалярное произведение векторов x и y, $|x|$ — длина вектора x, C — класс всех измеримых выпуклых множеств в k-мерном эвклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^k$,

$$m_3 = \sup_\omega \int_\Omega |f(\eta)|^3 p(\omega, d\eta),$$

$$L_{3n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{\lambda_p^3} \left\{ \sup_\omega \int_\Omega |(\theta_p, f(\eta))|^3 p(\omega, d\eta) \right\},$$

$$L_{1n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{k} \frac{1}{\lambda_p} \cdot \int_{\Omega} |(\theta_p, f(\eta))| \pi(d\eta),$$

где θ_p, $p = 1, \ldots, k$ — ортонормированные собственные векторы, a, γ_p^2 — соответствующие θ_p собственные числа матрицы Λ.

Теорема 1. *Если* $m_3 < \infty$ *и* $\int_{\Omega} |f(\eta)| \pi(d\eta) < \infty$, *то*

$$\sup_{A \in C} |\Delta_n(A)| \leqslant h(k, \rho) [L_{3n} + L_{1n} + (\sqrt{n})^{k-1} (1/3 + 2/3 \rho)^n (1 + L_{1n})],$$

где $h(k, \rho)$ *зависит только от* k *и* ρ.

В случае конечных однородных цепей Маркова многомерная предельная теорема доказана в работе ([3]), а в ([4]) получены асимптотические разложения.

Равномерной оценке $\Delta_n(A)$ по некоторым определенным подклассам всех борелевских множеств для независимых случайных векторов посвящены работы ([1, 2, 7, 9]).

Теорема 1 является обобщением результата В. В. Сазонова ([8]), полученного для независимых одинаково распределенных случайных векторов, на случай однородных цепей Маркова, а при $k = 1$, с точностью до зависящей от ρ постоянной, следует оценка, приведенная в работе ([5]), полученная при более ограничительных условиях на моменты.

Как показывает следующая теорема, при существовании момента порядка $3 + \delta$, $0 < \delta \leqslant 1$, можно получить оценку скорости слабой сходимости в многомерной центральной предельной теореме.

Для любой действительной функции $g(x)$, определенной на R^k, положим

$$W_g(A) = \sup_{x, y \in A} |g(x) - g(y)|, \quad A \subseteq R^k, \quad g_u(x) = g(x + u).$$

Теорема 2. *Если при некотором* $0 < \delta \leqslant 1$,

$$m_{3+\delta} = \sup_{\omega} \int_{\Omega} |f(\eta)|^{3+\delta} p(\omega, d\eta) < \infty, \quad \int_{\Omega} |f(\eta)| \pi(d\eta) < \infty,$$

то для любой ограниченной измеримой функции g

$$\left| \int_{R^k} g\, d(P_n - \Phi) \right| \leqslant h_1(k, \rho, \delta) \cdot \frac{W_g(R^k)}{\sqrt{n}} [\beta_{3+\delta}^{3(1+\delta)/(3+\delta)} + \beta_1 +$$

$$+ (\sqrt{n})^k \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\rho\right)^n (1 + \beta_1)] + h_2(k, \rho) \sup_u \int_{R^k} W_{g_u}(S(\cdot, h_3(k, \rho) \beta_{3+\delta}^{3(3+\delta)})) d\Phi,$$

$$\beta_{3+\delta} = \sup_{\omega} \int_{\Omega} |Bf(\eta)|^{3+\delta} p(\omega, d\eta), \quad \beta_1 = \int_{\Omega} |Bf(\eta)| \pi(d\eta),$$

$S(x, \varepsilon) = \{y;\ |x - y| < \varepsilon\}$, h_1, h_2, h_3 — *положительные константы, зависящие от указанных аргументов.*

Пусть ∂A — граница множества A и $A^\varepsilon = \{x;\ |x - y| < \varepsilon$ при некотором $y \in A\}$. Следуя работе ([6]), класс множеств E называем Φ-равномерным, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \sup_{A \in E} \Phi((\partial A)^\varepsilon) = 0.$$

Рассмотрим подкласс Φ-равномерного класса множеств

$E(d, \varepsilon_0) = \{A;\ A \in B^k,\ \Phi((\partial A)^\varepsilon) \leqslant d\varepsilon$ для любого $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]\}$, где B^k — класс всех борелевских множеств на R^k и d, ε_0 — положительные числа. В работе ([6]) приведено большое число примеров классов множеств, содержащихся в $E(d, \varepsilon_0)$. Положим

$$E^*(d, \varepsilon_0) = \{A;\ A - x \in E(d, \varepsilon_0) \quad \text{для любого} \quad x \in R^k\},$$

где $A - x = \{a - x;\ a \in A\}$.

Поскольку класс C инвариантен относительно сдвигов, из леммы 1 работы [8] следует, что при любом $\varepsilon_0 > 0$

$$C \subset E^*\left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\, k^{3/2}, \varepsilon_0\right).$$

Из теоремы 2 вытекает, что при условиях этой теоремы

$$\Delta_n^* = \sup_{A \in E^*(d,\varepsilon_0)} |\Delta_n(A)| \leqslant h_4(k, \rho, \delta)\left[\frac{\beta_1}{\sqrt{n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_{3+\delta}^{3(1+\delta)/(3+\delta)}}{\sqrt{n}}\left(1 + d + \frac{1}{\varepsilon_0}\right) + (\sqrt{n})^{k-1}({}^1/_3 + {}^2/_3\rho)^n (1 + \beta_1)\right],$$

где h_4 зависит от указанных аргументов.

Замечание. Если требовать лишь существования m_3, то для Δ_n^* пока удается получить оценку порядка $\ln^{1/2 k} n / \sqrt{n}$.

Теорема 2 обобщает основной результат работы [9], который доказан для независимых случайных векторов.

Теорема 1 доказывается методом усечения и использованием оценки близости двух распределений по близости производных соответствующих характеристических функций, приведенной в работе [10].

Теорема 3 также доказывается методом характеристических функций с применением леммы 8 работы [9].

Автор выражает глубокую благодарность С. Х. Сираждинову за постановку задачи и ценные советы.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
11 XI 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] H. Bergstrom, Skand. Akt., 28, 106 (1945). [2] C. G. Esseen, Acta Math., 77, 1 (1945). [3] А. Н. Колмогоров, Изв. АН СССР. сер. матем., 13, 281 (1949). [4] С. Х. Сираждинов, ДАН, 84, № 6, 1143 (1952). [5] С. В. Нагаев, Теория вероятн. и ее применен., 6, № 1, 69 (1961). [6] P. Billingsley, F. Topse, Zs. Wahr. verw. Geb., 7, 1 (1967). [7] B. Von Bahr, Arhiv math., 7, 71 (1967). [8] B. V. Sazanov, Sankhya, Ser. A, 30, 2, 181 (1968). [9] Р. Н. Баттагария, Теория вероятн. и ее примен., 15, № 1, 69 (1970). [10] В. И. Ротарь, Теория вероятн. и ее примен., 15, № 4, 647 (1970).