Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 537.533.3

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

В. В. АВИЛОВ, Г. П. ПРУДКОВСКИЙ

БЫСТРОЕ РЕШЕНИЕ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

(*Представлено академиком П. Л. Капицей 11 X 1971*)

Во многих электронных приборах поля и потоки заряженных частиц можно считать двумерными. К ним относятся системы со скрещенными полями (в частности, магнетрон), в которых траектории частиц являются плоскими кривыми, а также системы с продольным магнитным полем, если плотность потока частиц, движущихся по пространственным траекториям, остается функцией двух координат.

В настоящее время, благодаря увеличению мощности ЭВМ, все более эффективными становятся методы численного исследования электронных приборов. В качестве примера следует указать на работу ([1]), в которой предпринят расчет магнетрона. Аналогичные исследования проводились в работах ([2–5]).

При численном расчете электронный или ионный поток характеризуется движением определенного числа «контрольных» частиц. На каждом шаге по времени от t к $t+\Delta t$ исходными являются координаты и скорости этих частиц; последовательно производится определение плотности пространственного заряда, решение уравнения Пуассона для электрического поля, определение внешних полей и суммарной силы, действующей на каждую частицу, решение уравнений движения и определение новых значений координат и скоростей.

Для решения уравнения Пуассона в произвольной двумерной области применяются итерационные методы. Они весьма трудоемки и имеют плохую сходимость при наличии угловых точек на границе области.

Для прямоугольной области разработаны прямые методы решения. Наиболее совершенный метод описан в работе ([6]), где используется разложение искомого потенциала и заданной плотности пространственного заряда в ряды Фурье по одной из координат; в работе ([7]) описан ускоренный метод определения коэффициентов Фурье (число операций порядка $MN\log_2 N$ на сетке $M\times N$). Сопоставление с лучшими итерационными методами при сетке 48×48 показывает выигрыш во времени счета в 10 раз по сравнению с методом переменных направлений и в 60 раз — с методом последовательной верхней релаксации. Расчет поля в сложной области известными методами настолько трудоемок, что выполнение его на каждом шаге интегрирования уравнений движения делает задачу чрезмерно громоздкой.

Для того чтобы распространить «сверхбыстрый» метод ([6, 7]) на произвольную односвязную область в плоскости переменной $z=x+iy$ нами было использовано конформное отображение ее на прямоугольник в плоскости переменной $w=u+iv$. Электрическое поле $\Phi(x, y)$ подчиняется уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho(x, y). \tag{1}$$

Производя замену переменных в левой части и учитывая соотношения Коши — Римана для функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$, можно получить

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)\left|\frac{dw}{dz}\right|^2. \tag{2}$$

Плотность пространственного заряда $\rho(x, y)$ определяется по числу контрольных частиц на единицу площади в плоскости z. Обозначив через ρ_w аналогичную величину в плоскости w, найдем

$$\rho(x, y)=\rho_w(u, v)\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}=\left|\frac{dw}{dz}\right|^2\rho_w(u, v), \tag{3}$$

так как якобиан преобразования равен квадрату модуля комплексной производной отображающей функции. Подставляя (2) и (3) в (1), находим

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=-\frac{1}{\varepsilon}\rho_w(u, v). \tag{4}$$

Таким образом, при данном способе определения правой части, уравнение Пуассона инвариантно относительно конформного преобразования координат и может быть решено на стандартной прямоугольной области, если известны координаты частиц в плоскости w. Преобразуя координаты, можно получить уравнение движения частицы непосредственно в плоскости w, однако при этом оно становится нелинейным относительно производных и численное решение его значительно усложняется.

Лучшим является комбинированный способ расчета. Исходные величины — скорость частицы в плоскости z и координаты в плоскости w. Последние служат аргументами для коэффициентов в уравнении движения, в результате решения которого определяется скорость $\dot{z}(t+\Delta t)$ и пространственный шаг Δz как функция w и $\dot{z}$. Новое значение w определяется из соотношения

$$\Delta z=\int\limits_{w(t)}^{w(t+\Delta t)}\frac{dz}{dw}\,dw \tag{5}$$

с помощью одной — двух итераций. В этом расчете фигурирует производная dw/dz, вычислять которую обычно проще, чем $w(z)$. Весьма широкий класс отображений осуществляется с помощью интеграла Шварца — Кристофеля; в этом случае аналитическая запись dw/dz очень проста.

Значения dw/dz при отсутствии аналитического выражения определяются численным расчетом в узлах некоторой сетки в плоскости w. Регулярность dw/dz как функции w позволяет построить по ее значениям в N точках интерполяционный полином $N-1$ степени.

При вычислении потенциала Φ в ряде случаев целесообразно выделить решение уравнения (4) с нулевыми граничными условиями, т. е. поле пространственного заряда. Если оно невелико по сравнению с внешними полями, то определение его можно производить с меньшей точностью.

Так как конформное преобразование, отображающее исходную область на прямоугольник не единственно, можно выбрать его таким образом, чтобы конформная сетка была более мелкой там, где может происходить скопление пространственного заряда, и более редкой там, где его плотность мала.

Изложенный метод был применен для численного исследования ниготрона ([8]) — генератора с.в.ч. магнетронного типа. При численных расчетах магнетрона метод позволяет оперировать с точными граничными условиями при вычислении поля пространственного заряда, а также с точными значениями постоянного и высокочастотного поля, не ограничиваясь одноволновым приближением, как это делается в настоящее время.

Помимо задач электроники, возможно приложение изложенного метода в других областях, где требуется определение потенциальных полей с распределенными источниками, например, в тепловых расчетах. Следует заметить, что преобразование, аналогичное (2), может быть проделано в более общем виде

$$\operatorname{div}_{x,y}\gamma \operatorname{grad}_{x,y}\Phi = \operatorname{div}_{u,v}(\gamma \operatorname{grad}_{u,v}\Phi)\left|\frac{dw}{dz}\right|^2; \tag{6}$$

последнее выражение может быть полезно для расчета полей в неоднородных средах.

Авторы выражают благодарность акад. П. Л. Капице за поддержку работы, чл.-корр. АН СССР Л. А. Вайнштейну за ценные советы и Е. Л. Косарєву за помощь при работе на ЭВМ.

Институт физических проблем им. С. И. Вавилова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
6 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. P. Yu, G. P. Kooyers, O. Buneman, J. Appl. Phys., **36**, 2550 (1965). [2] Л. М. Лагранский, Б. Л. Ушерович, Вопр. радиоэлектроники, сер. 1, № 1, 1964, стр. 3. [3] Л. Ф. Белякова, Г. Ф. Филимонов, Электронная техника, Сер. 1, № 11, 1968, стр. 5. [4] П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. П. Галимулин, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, **13**, № 7, 109 (1970). [5] П. В. Романов, А. С. Рошаль, В. П. Галимулин, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, **13**, № 10, 1554 (1970). [6] R. W. Hockney, J. Assoc. Comput., Machinery, **12**, 95 (1965). [7] J. W. Colley, J. W. Tukey, Math. Comput., **19**, 297 (1965). [8] П. Л. Капица, С. И. Филимонов, С. П. Капица, Сборн. Электроника больших мощностей, № 3, 7, «Наука», 1964; № 6, 7, «Наука», 1969.