

В. А. РУБАН

НЕСИНГУЛЯРНЫЕ МЕТРИКИ ТИПА ТАУБА — НЬЮМЕНА — УНТИ — ТАМБУРИНО С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком Я. Б. Зельдовичем 1 X 1971)

Хотя наличие локальных сингулярностей, в которых инварианты геометрии пространства — времени V_4 обращаются в бесконечность, — характерное и довольно общее свойство свободных полей гравитации в ОТО (^{1, 2}), однако оно не является универсальным. Известно несколько примеров решений уравнений Эйнштейна в пустоте $R_i^k = 0$ с конечным всюду тензором кривизны $R_{ijkl} \neq 0$, которые не имеют подобных сингулярностей. Они представляют регулярные чисто вакуумные поля тяготения (как волновые поперечного нуля-типа II N (³⁻⁵), так и нерадикационные с «продольной» структурой II) (^{6, 7}) и, следовательно, противоречат принципу Маха, согласно которому геометрия V_4 должна полностью определяться материальными источниками (⁶).

Среди таких «антимеховских» исключений наиболее интересна метрика Тауб — НУТ «Вселенной» (⁸), которая в стационарных R -областях (⁹) оказывается простым обобщением внешнего поля Шварцшильда, а в нестатических T -областях выступает как анизотропная вакуумная модификация закрытой модели Фридмана — частный вариант однородной космологической метрики IX типа Бианки — Тауба (⁶).

Цель заметки — рассмотреть обобщенное семейство несингулярных Тауб — НУТ «Вселенных» (¹⁰), которое объединяет набор точных решений уравнений Эйнштейна — Максвелла в пустоте при $\Lambda \neq 0$ для специальных типов пространственно-однородных метрик с повышенной локально вращательной симметрией — G_4 III₀(I), VII, VIII па V_3 (^{11, 12}), вида

$$ds^2 = d\tau^2 - e^{\omega(\tau)} [dx_1 + 2Nh(x_2)dx_3]^2 - a^2(\tau) [dx_2^2 + \Sigma^2(x_2)dx_3^2]; \quad (1)$$

$$\Sigma(x_2) = \begin{cases} \sin x_2 \\ x_2, \\ \text{sh } x_2; \end{cases} \quad h(x_2) = \begin{cases} \cos x_2, \\ 1/2 x_2^2, \\ \text{ch } x_2; \end{cases} \quad k = \begin{cases} +1, & \text{(VIII),} \\ 0 & \text{(III}_0\text{),} \\ -1; & \text{(VII).} \end{cases}$$

Комбинированная система уравнений Эйнштейна — Максвелла в единой геометризованной теории гравитации и электромагнетизма Райнича (¹³) для метрик (1) имеет вид (^{11, 12})

$$\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{\dot{\omega}\dot{a}}{a} - \frac{N^2 e^{\omega}}{a^4} = \kappa T_0^0 + \Lambda, \quad \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} + \frac{2\ddot{a}}{a} - \frac{3N^2 e^{\omega}}{a^4} = \kappa T_1^1 + \Lambda,$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{\omega}\dot{a}}{2a} + \frac{1}{2} \left(\ddot{\omega} + \frac{\dot{\omega}^2}{2} \right) + \frac{N^2 e^{\omega}}{a^4} = \kappa T_2^2 + \Lambda = \kappa T_3^3 + \Lambda, \quad (2)$$

$$T_i^k = \frac{1}{4\pi} \left[F_{in} F^{kn} - \frac{1}{4} \delta_i^k F_{mn} F^{mn} \right], \quad F^{ik}_{;k} = 0, \quad {}^+ F^{ik}_{;k} = 0,$$

где $F_{ik} = -F_{ki}$ — тензор напряженности электромагнитного поля, имеющих только две ненулевых компоненты (¹⁴)

$$F_{01} = F_{10} = E e^{\omega/2}, \quad F_{23} = -F_{32} = H a^2. \quad (3)$$

Векторы электрической и магнитной напряженностей параллельны и удовлетворяют уравнениям «индукционного» типа

$$\frac{d}{d\tau} (H a^2) = -2N e^{\omega/2} E, \quad \frac{d}{d\tau} (E a^2) = 2N e^{\omega/2} H, \quad (4)$$

а остальные уравнения Максвелла выполняются тождественно: $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$.

Условия Райнича для тензора энергии — импульса ⁽¹³⁾ $T_0^0 + T_1^1 + T_2^2 + T_3^3 = 0$, $(T_0^0)^2 = (T_1^1)^2 = (T_2^2)^2 = (T_3^3)^2$, $T_0^0 = w \geq 0$ совместно с требованием осевой симметрии $T_2^2 = T_3^3$ однозначно определяют его алгебраическую структуру:

$$T_0^0 = T_1^1 = -T_2^2 = -T_3^3 = w \geq 0. \quad (5)$$

Из тождеств Бианки $T_{k;i}^i = 0$ с учетом (5) можно получить аналог адиабатического закона сохранения плотности энергии $w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2)$:

$$\dot{w}/w = -4\dot{a}/a, \quad \kappa w = Q^2/a^4, \quad Q = \text{const}. \quad (6)$$

Таким образом, полностью определяется функциональный вид источников T_i^k в (2). Посредством замены переменных $\tilde{E} = Ea^2$, $\tilde{H} = Ha^2$, $d\tilde{t} = \frac{2Ne^{\omega/2}}{a^2} d\tau$ в системе (4), принимающей вид $d\tilde{H}/d\tilde{t} = -\tilde{E}$, $d\tilde{E}/d\tilde{t} = \tilde{H}$, находится зависимость электрической и магнитной напряженностей $E = (Q/a^2) \cos \tilde{t}$, $H = (Q/a^2) \sin \tilde{t}$.

При использовании (5), (6) система (2) сводится к уравнениям

$$\dot{\omega}\dot{a} - 2\ddot{a} = -\frac{2N^2e^{\omega}}{a^3}, \quad \frac{2\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = \frac{3N^2e^{\omega}}{a^4} + \Lambda + \frac{Q^2}{a^4}. \quad (7)$$

Их решение ищется по аналогии с легко интегрируемым случаем пустых T -моделей ($N = 0$) ^(15, 16) в виде

$$e^{\omega/2} = \dot{a}Z(a), \quad \dot{a}^2 = \frac{F(a)}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3} - \frac{Q^2}{a^2} - k. \quad (8)$$

Функции $Z(a)$ и $F(a)$ находятся из расцепленной системы

$$\frac{dZ}{da} + \frac{N^2Z^3}{a^3} = 0, \quad \frac{dF}{da} = \frac{3N^2Z^2}{a^2} \left(\frac{F}{a} + \frac{\Lambda a^2}{3} - \frac{Q^2}{a^2} - k \right), \quad (9)$$

которая допускает точное решение

$$Z = \left(1 - \frac{N^2}{a^2} \right)^{-1/2}, \quad F(a) = b \left(1 - \frac{N^2}{a^2} \right)^{3/2} + \frac{kN^4}{a^3} + \\ + \frac{3kN^2}{a} \left(1 - \frac{N^2}{a^2} \right) + \frac{Q^2N^2}{a^3} + \frac{\Lambda N^2}{a^3} \left\{ (a^2 - N^2)(a^2 - 3N^2) - \frac{N^4}{3} \right\}. \quad (10)$$

Здесь $b = \text{const}$, а константа интегрирования в $Z(a)$ отождествляется с произвольным параметром N в (1) за счет свободы выбора x_1 . Преобразованием (1) к канонической T -системе вида $a^2(\tau) = T^2 + N^2$ решение (8), (10) можно выразить в замкнутой форме

$$ds^2 = \frac{dT^2}{U(T)} - U(T) [dx_1 + 2Nh(x_2)dx_3]^2 - (T^2 + N^2) [dx_2^2 + \Sigma^2(x_2)dx_3^2], \\ U(T) = \frac{2(MT + kN^2) - Q^2}{T^2 + N^2} - k + \frac{\Lambda(T^4 + 6N^2T^2 - 3N^4)}{3(T^2 + N^2)}, \quad (11) \\ {}^*F = E + iH = \frac{Q}{T^2 + N^2} e^{2i \arctg(T/N) + \theta_0}.$$

Последняя объединяет вакуумные поля тяготения ($\Lambda = Q = 0$), пространства Эйнштейна ($\Lambda \neq 0$, $Q = 0$) и геометрии Райнича ($Q \neq 0$, $\Lambda = 0$).

В «сферических» ($k = +1$)-метриках, например, Тауб — НУТ «Вселенной» ($\Lambda = Q = 0$) и ее обобщении с электромагнитным полем ($Q \neq 0$, $\Lambda = 0$) ⁽¹⁴⁾, постоянная $b = 2M$ совпадает с шварцшильдовой массой, а параметр N интерпретируется как гравитационный аналог магнитного монополя ⁽¹⁷⁾.

В пределе $N = 0$ форма (11) переходит в метрику T -областей сферически-симметрических ($k = +1$) полей Шварцшильда ($\Lambda = Q = 0$),

де Ситтера ($M = Q = 0$), Котлера ($Q = 0$), Райсснера — Нордстрема ($\Lambda = 0$) и соответствующих им аналогов с плоской ($k = 0$) и псевдосферической ($k = -1$) симметриями (⁴, ⁶, ¹², ¹⁵).

При $N \neq 0$ метрики (11) в T -областях с $U(T) > 0$ представляют космологический и электромагнитный ($Q \neq 0$) варианты аксиально-симметричных анизотропных пустых моделей Бианки — Тауба (⁶) II, III (VIII) и IX типов (соответственно $k = 0, -1, +1$), с однородным пространством V_3 (имеющим, в частности, при $k = +1$ топологию 3-сферы).

Тензор кривизны Вейля для метрик (11) принадлежит к алгебраическому типу ID (⁴) и имеет два инварианта, которые вычисляются по способу Мизнера (⁸) и объединяются в комплексной форме:

$$\Psi_2 = (M - ikN) / (T - iN)^3. \quad (12)$$

Эти инварианты и скаляры, образованные из тензора Римана, а также напряженности и плотность энергии электромагнитного поля (6) — регулярные функции во всей координатной области ($-\infty < T < \infty$). Следовательно, Тауб — НУТ-метрики с $N \neq 0$ свободны от локальных особенностей, хотя при $N = 0$ появляется сингулярность $T = 0$: либо пространственная, если $M < 0$, либо временная для $M > 0$ ($Q = 0$), с асимптотической Казнера (²): $e^{\omega/2} \propto \tau^{-1/3} \rightarrow \infty$, $a \propto \tau^{2/3} \rightarrow 0$.

Псевдосингулярности $U(T_i) = 0$, подобные сфере Шварцшильда (⁴, ¹³, ¹⁵), не проявляются в инвариантах (12), так что V_4 должно включать, наряду с T -областями, и стационарные R -области, где $U(T) < 0$, и координаты T и x_1 меняются ролями. Полученная из (11) переобозначением $T \rightarrow R$ форма дает обобщение НУТ-пространств (⁹) с $\Lambda \neq 0$ и неоднородным электромагнитным полем ($Q \neq 0$), подобным при $k = +1$ полю Райсснера — Нордстрема для точечного заряда.

Границы между T - и R -областями $T = T_i$ — изотропные горизонты Киллинга V_3^* подгруппы G_1 ($\xi_i \xi^i = U(T) = 0$), выступающие в качестве полупроницаемых причинных мембран, причем в T -системах они проявляются как одновременные фиктивные особенности вида (²)

$$e^{\omega/2} \propto (\tau - \tau_i) \rightarrow 0, \quad a(\tau_i) = \text{const} \neq 0.$$

T -области (11) можно рассматривать как особый космологический вид полей Эйнштейна, которые не могут быть гравитационными волнами ввиду «продольности» структуры ID и не имеют классического эквивалента (¹⁶). В геометриях Райнича они заполнены однородным электромагнитным полем $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$, силовые линии которого направлены вдоль оси симметрии V_3 и оказываются (¹⁴) либо неограниченными, либо замкнутыми на 3-сферах ($k = +1, N \neq 0$). В T -моделях ($N = 0$) (¹⁵) электрическое и магнитное поля имеют расцепленную монополярную структуру, а их напряженности $E(T)$ и $H(T)$ меняются в соответствии с условием «вмороженности» — постоянства потока в V_3 (¹³).

R -области НУТ-метрик (11) при $N \neq 0$ не удается отождествить с внешним полем некоторого распределения источников (¹⁸), и у них пока нет физически приемлемой интерпретации из-за ряда глобальных аномалий V_4 типа замкнутых временных линий (¹⁸). Координатные линии $x_3 = \varphi$ — замкнутые круги в силу аксиальной симметрии ($0 \leq x_3 \leq 2\pi$), и они оказываются времениподобными, если $g_{33} \geq 0$, т. е. при $U(T) < 0$

$$\Sigma^2(x_2)/h^2(x_2) = -\frac{4N^2U(T)}{T^2 + N^2} \geq 0. \quad (13)$$

Максимально расширенные Тауб — НУТ «Вселенные», состоящие из полного набора T - и R -областей, связанных посредством аналитического продолжения метрик (11) через псевдосингулярности $U(T_i) = 0$, всюду регулярны в локальном отношении и отвечают глобально нестационарным «антимаховским» гравитационным и электромагнитным полям с продольной структурой, но без реальных источников и зарядов. Они допу-

скают и микроскопическую трактовку в духе геометриродинамических монополей и «геонов» Уилера с чисто полевыми эквивалентами «массы без массы» и «зарядов без зарядов» (¹³, ¹⁴).

Тауб — НУТ-метрики (11) содержатся как частный случай в более широком наборе аксиально-симметричных «стационарных» решений системы Эйнштейна — Максвелла (¹⁹). «Сферический» вариант этого обобщенного семейства (¹⁷) в нестационарных T -областях имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= 2(du + A d\varphi)(dT + l \sin^2 \varphi) - U(T, \vartheta)[du + A d\varphi]^2 - \\ &\quad - R^2(T, \vartheta)[d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2], \\ R^2 &= T^2 + (N + l \cos \vartheta)^2, \quad A = 2N \cos \vartheta + l \sin^2 \vartheta, \\ U(T, \vartheta) &= \frac{2MT + 2N(N + l \cos \vartheta) - Q^2}{T^2 + (N + l \cos \vartheta)^2} - 1. \end{aligned} \quad (14)$$

Он представляет при $U(T, \vartheta) \geq 0$ космологическую комбинацию метрик Тауб — НУТ «Вселенной» ($l = 0$) и Керра ($N = 0$), обычно интерпретируемой как поле вращающейся массы M с угловым моментом Ml (¹⁵). Если $N^2 > l^2$, пространственная кольцевая сингулярность метрики Керра ($T = 0$, $\vartheta = 1/2\pi$) устраняется, и локальная геометрия V_4 (14) регулярна всюду в T - и R -областях, как показывает поведение инвариантов кривизны и плотности энергии электромагнитного поля:

$$\Psi_2 = \frac{M - iN}{[T - i(N + l \cos \vartheta)]^3}, \quad \kappa w = \frac{Q^2}{[T^2 + (N + l \cos \vartheta)^2]^2}. \quad (15)$$

Указанные различные примеры «антимаховских» геометрий V_4 дают основание предполагать существование более общих классов несингулярных свободных полей гравитации Эйнштейна. Согласно теоремам Пенроуза — Хоукина (²⁰), такие локально регулярные метрики должны обнаруживать физические особенности иной глобальной природы типа нарушений принципа причинности.

Вопрос о реальности и интерпретации «антимаховских» решений уравнений Эйнштейна, подобных Тауб — НУТ «Вселенной», с разнообразными аномалиями глобальной структуры пространства — времени не ясен. Вполне возможно, что такие физические особенности, как неустрашимые нарушения причинности, указывают на неполноту и внутреннюю противоречивость ОТО.

Автор выражает признательность Л. Э. Гуревичу, Э. Б. Глинеру, А. Г. Дорошкевичу и И. Д. Новикову за обсуждение.

Физико-технический институт им. А. Ф. Иоффе
Академии наук СССР
Ленинград

Поступило
24 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ A. Einstein, W. Pauli, Ann. Math., 44, 131 (1943). ² Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, 80, 391 (1963); В. А. Белинский, Е. М. Лифшиц, И. М. Халатников, УФН, 102, 963 (1970). ³ I. Ozsvath, E. M. Schüking, Recent Development in GR, Warszawa, 1962; I. Ozsvath, J. Math. Phys., 6, 1255 (1965). ⁴ W. Kundt, J. Ehlers, Gravitation, N. Y., 1962. ⁵ W. B. Bonnor, J. Math. and Mech., 6, 203 (1957). ⁶ A. H. Taub, Ann. Math., 53, 472 (1951). ⁷ V. Joseph, Proc. Camb. Phil. Soc., 53, 836 (1957). ⁸ Ч. В. Мизнер, А. Х. Тауб, ЖЭТФ, 55, 233 (1968); C. W. Misner, J. Math. Phys., 4, 924 (1963). ⁹ E. T. Newman, L. Tamburino, T. Unti, J. Math. Phys., 4, 915 (1963). ¹⁰ В. А. Рубан, Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии, Тбилиси, 1969. Препринт ФТИ им. А. Ф. Иоффе АН СССР, № 355, 1971. ¹¹ G. F. R. Ellis, M. A. H. MacCallum, Commun. Math. Phys., 12, 108 (1969). ¹² А. З. Петров, Новые методы в ОТО, «Наука», 1966. ¹³ Дж. А. Уилер, Гравитация, нейтрино, Вселенная, ИЛ, 1962. ¹⁴ D. R. Brill, Phys. Rev., 133B, 845 (1964). ¹⁵ Я. Б. Зельдович, И. Д. Новиков, Релятивистская астрофизика, «Наука», 1967. ¹⁶ В. А. Рубан, Письма ЖЭТФ, 8, 669 (1968); 56, 1915 (1969). ¹⁷ M. Demianski, E. T. Newman, Bull. Polon. Acad. Sci., Ser. Math.-phys., 14, № 11, 653 (1964). ¹⁸ W. B. Bonnor, Proc. Camb. Phil. Soc., 66, 145 (1969). ¹⁹ B. Carter, Phys. Lett., 26A, 399 (1968); W. Kinnersley, J. Math. Phys., 10, 1195 (1969). ²⁰ S. W. Hawking, R. Penrose, Proc. Roy. Soc. A, 314, 529 (1970).