Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 517.544.3 *МАТЕМАТИКА*

С. Н. АНТОНЦЕВ, В. Н. МОНАХОВ

О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО КЛАССА ЗАДАЧ СОПРЯЖЕНИЯ СО СДВИГОМ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 28 XII 1971)

В работе доказывается разрешимость краевой задачи сопряжения с недифференцируемым сдвигом для квазилинейных эллиптических систем уравнений в многосвязных областях. При этом предполагается, что каждая связная компонента границы области, будучи простой замкнутой кривой (вообще говоря, неспрямляемой), является следом плоского квазиконформного отображения с измеримыми характеристиками.

Отметим, что задачи сопряжения с дифференцируемым сдвигом на кривых Ляпунова в классе аналитических функций изучались различными авторами и обзор их результатов хорошо представлен в статье ([1]).

Определение 1. Будем говорить, что простая замкнутая кривая L принадлежит классу LQ или допускает Q-квазиконформное отображение, если L является образом окружности при Q-квазиконформном отображении всей плоскости на себя ([2]). Пусть $L=\sum\limits_{k=0}^{m} L_k$ — совокупность $(m+1)$ непересекающихся кривых класса LQ, охватываемых кривой L_0. Областью D^+ назовем $(m+1)$-связную область, лежащую внутри L_0 и вне L_k, $k=1,\ldots,m$, а областью D^- — дополнение к $(D^+ + L)$ до полной плоскости E.

Определение 2. Гомеоморфное отображение $\alpha=\alpha_k(t)$, $t\in L_k$, $k=0,\ldots,m$, контура $L=\sum\limits_{k=0}^{m} L_k$ на себя, сохраняющее направление обхода на каждой из кривых L_k, назовем отображением класса SQ, если для каждого $\alpha_k(t)$ существует Q-квазиконформное отображение $w^k(z)$ всей плоскости на себя, удовлетворяющее уравнению

$$w^k_{\bar z} - q^k(z)\, w^k_z = 0, \quad |q^k(z)| \leqslant q_0 = (Q-1)/(Q+1), \tag{1}$$

и такое, что $w^k(t) = \alpha_k(t)$, $t\in L_k$.

Необходимым и достаточным условием принадлежности отображения $\alpha=\alpha(x)$, $\alpha(\pm\infty)=\pm\infty$, прямой $y=0$ в себя классу SQ, является выполнение неравенства ([2])

$$M^{-1} \leqslant \frac{\alpha(x+t)-\alpha(x)}{\alpha(x)-\alpha(x-t)} \leqslant M \leqslant \frac{1}{16}\exp\{\pi Q\}, \tag{2}$$

где t — произвольное вещественное число. Общий случай приводится к рассмотренному конформными отображениями. Отметим, что условие (2) не влечет за собой дифференцируемости $\alpha=\alpha(x)$.

Определение 3. Будем говорить, что заданная на дуге $l\subseteq L_k$ функция $f(t)$ принадлежит классу $SW_p^1(l)$, $p>2$, если существует функция $F(z)$ класса $W_p^1(\overline{D}_{\bar k})$, $p>2$, совпадающая на l с $f(t)$.

Краевую задачу сопряжения со сдвигом для квазилинейной эллиптической системы уравнений сформулируем следующим образом. Требуется найти решение $w = w(z)$, определенной по всей плоскости системы уравнений

$$w_{\bar{z}} - \mu_1(z, w) w_z - \mu_2(z, w) w_z = A(z, w), \tag{3}$$

удовлетворяющее на линии L краевому условию

$$w^+[\alpha(t)] = G(t)\{w^-(t) + \lambda(t)\overline{w^-(t)}\} + g(t), \tag{4}$$

коэффициенты которого обладают свойствами:

I) $G(t), g(t) \in SW_p^1(\widehat{t_k t_{k+1}}), \quad p > 2, \quad t_k \in L_i, \quad i = 0, \ldots, m; \ k = 0, \ldots, n$, причем $G(t_k - 0) \neq G(t_k + 0)$ и $|G(t)| \neq 0$;

II) $\alpha = \alpha(t)$ является отображением класса SQ;

III) $\lambda = \lambda(t) \in SW_p^1(L), \quad p > 2, \quad |\lambda(t)| \leqslant 1 - \delta_0, \quad \delta_0 > 0$.

Относительно коэффициентов μ_i и $A = A_1(z, w) w + A_2(z, w)\bar{w} + A_0(z, w)$ будем предполагать, что они удовлетворяют условиям

$$|\mu_1(z, w)| + |\mu_2(z, w)| \leqslant \mu_0 < 1, \tag{5}$$

$$\|A_i(z, w)\|_{L_p(\overline{D^\pm})} \leqslant M_1 \quad \text{при всех} \quad w, \ p > 2, \tag{6}$$

причем μ_i, A_i непрерывны по w при почти всех z и $\mu_i(z, w) = A_i(z, w) \equiv 0$ при достаточно больших $|z| > R$. Поскольку свойства I)—III) и (5), (6) инвариантны относительно конформных отображений областей $D^\pm$ на области, ограниченные окружностями ([2]; [4], стр. 98, 287), то будем без нарушения общности считать, что L_k: $\{|z - z_k| = r_k\}$ и L_0: $\{|z| = 1\}$. Определим обычным образом ([3], стр. 472) индекс $\varkappa$ класса решений, неограниченных, вообще говоря, во всех точках разрыва $G(t)$.

Задача I ($\varkappa \geqslant 0$). Требуется найти решение $w(z) \in W_p^1(\overline{\Omega^\pm})$, $p > 2$, задачи (3), (4), имеющее непрерывные предельные значения $w^\pm(t)$ всюду на L, за исключением точек t_k, и удовлетворяющее условию

$$\lim \left[w^-(z) - \sum_{k=0}^{-\varkappa} c_k z^k\right] = 0, \quad |z| \to \infty, \tag{7}$$

где c_k — заданные комплексные постоянные, а $\Omega^\pm$ — конечные строго внутренние подобласти областей $D^\pm$.

Задача II ($\varkappa < 0$). Требуется найти решение $w(z) \in W_p^1(\overline{\Omega^\pm})$, $p > 2$, задачи (3), (4), имеющее непрерывные предельные значения $w^\pm(t)$ на L всюду за исключением точек t_k и $(|\varkappa| + 1)$ комплексную постоянную c_k такую, что

$$\lim \left[w^-(z) - \sum_{k=0}^{|\varkappa|} c_k z^k\right] = 0, \quad |z| \to \infty. \tag{8}$$

Теорема 1. *Пусть коэффициенты уравнения* (3) *и граничного условия* (4) *удовлетворяют предположениям* (5), (6) *и* I)—III).

Тогда существует по крайней мере одно решение каждой из задач I, II, *для которых в* $D_\delta^\pm$: $\{|z| < R, \ |z - t_k| > \delta, \ z \in D^\pm\}$ *справедливы оценки*

$$\|w^\pm(z)\|_{W_p^1} \leqslant M_2, \quad |w^\pm(z)| \leqslant M_3 \prod_{k=0}^{n} |z - t_k|^{\alpha_k^*},$$

где

$$\alpha_k^* = \frac{\alpha_k (1 + \mu_0)(1 + q_0)}{(1 - \mu_0)(1 - q_0)}; \quad \alpha_k = \theta_k - [\theta_k] - 1,$$

$$\theta_k = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t_k - 0) - \arg G(t_k + 0)],$$

а q_0, μ_0 *определяются соответственно формулами* (2), (5).

При выполнении условий $|\alpha_k^*| < 1$, $k = 0, \ldots, n$, предельные значения $w^\pm(t)$ интегрируемы на L и, если дополнительно имеют место неравенства

$$\begin{gathered}|A(z, w^1) - A(z, w^2)| \leqslant N_1|w^1 - w^2|, \quad N_1(z) \in L_p, \quad p > 2,\\ |\mu_i(z, w^1) - \mu_i(z, w^2)| \leqslant N_2|w^1 - w^2|, \quad N_2(z) \leqslant N_0 = \text{const}, \qquad (9)\\ N_i(z) \equiv 0, \quad z \notin D_\delta^\pm, \quad i = 1, 2,\end{gathered}$$

то решения задач I, II и единственны. В случае $\varkappa < 0$ ограниченное на бесконечности решение задачи (3), (4) существует лишь при выполнении $|\varkappa|$-условий разрешимости ($c_k = 0, k = 1, |x|$).

Теорема 2. *Пусть* $\lambda(t) = g(t) = \{G(t) - 1\} \equiv 0$ *и выполняется неравенство* (9).

Тогда существует единственное однолистное в $D^\pm$ *решение* $w = w(z)$ *задачи* 1, *причем*

$$|w(z) - z| < \infty, \quad z \in E, \quad w^\pm(z), \quad z^\pm(w) \in H^\beta, \quad \beta = \frac{(1 - q_0)(1 - \mu_0)}{(1 + q_0)(1 + \mu_0)},$$

а образы $L_k^\alpha = w^\pm[\alpha(L_k)]$, $L_k^1 = w^\pm(L_k)$ *являются простыми замкнутыми кривыми класса* LQ_0.

В случае аналитических функций $w(z)$, $\mu_i = A \equiv 0$, теорема 2 доказана рядом авторов ([1], [2], [5]) в предположении, что $\alpha(t) \in C_\alpha^1(L)$, $L \in C_\alpha^1$ (в ([6]) при условии, что $\alpha(t) \in C^1$) и известна как теорема о конформном склеивании. Приведем схему доказательства теорем 1 и 2. Пусть сначала $w(z)$ — кусочно-аналитическая функция, т. е. $\mu_i = A \equiv 0$. Рассмотрим задачу о скачке

$$w^+[\alpha(t)] = w^-(t) + g(t) \qquad (10)$$

с $\alpha(t) \in SQ$, $g(t) \in SW_p^1(L)$, положив для простоты $m = 0$, т. е. $L = L_0$. Решение задачи (10) находится в виде

$$\left.\begin{array}{l} w^+[\alpha(z)],\ z \in D^+\\ w^-(z),\ z \in D^-\end{array}\right\} = T(\varphi|z) + F(z) + \sum_{k=0}^{p} a_k z^k \equiv \sigma(z), \qquad (11)$$

где $\alpha(z)$ — продолжение сдвига $\alpha(t) \in SQ$ до квазиконформного отображения области D^+ на себя, удовлетворяющего уравнению (2), a_k — произвольные комплексные постоянные и

$$T(\varphi|z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^+}\frac{\varphi(t)}{t - z}\,dD_t^+, \quad F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)}{t - z}\,dt,$$

$$\varphi(z) \in L_p(\overline{D^+}), \quad p > 2.$$

Утверждение теоремы 2 следует из представления (11) и свойств основного решения ([7]) уравнения Бельтрами $\sigma = \sigma(z)$ (при $a_k = g \equiv 0$, $k \neq 1$, $a_1 = 1$). Решение же общей задачи (4) с $\lambda(t) \equiv 0$ и $G(t) \neq 1$ представимо, как известно ([3]), в виде

$$w^+(z) = \prod_{k=0}^{n}[\sigma(z) - \sigma(t_k)]^{\alpha_k} x_1^+(z)\exp\{x_2^+(z)\},$$

$$w^-(z) = \prod_{k=0}^{n}\left[\frac{\sigma(z) - \sigma(t_k)}{\sigma(z)}\right]^{\alpha_k} x_1^-(z)\exp\{x_2^-(z)\},$$

где $x_i(z)$ — решения задач о скачке с некоторыми $\tilde{g}_i(t) \in SW_p^1(L)$.

Вернемся теперь к общей системе (3), заметив, что не изменяющей свойств (5)—(6) заменой

$$w^-(z) = (1 - |\lambda(z)|^2)^{-1}(\omega^- - \lambda\overline{\omega^-}), \quad w^+(z) = \omega^+(z),$$

где $\lambda(z)$, $|\lambda(z)| \leqslant 1 - \delta_1(\delta_0) < 1$ — продолжение функции $\lambda(t)$, исходная задача приводится к случаю $\lambda \equiv 0$. Выберем числа $p' > p > 2$ так, чтобы $\mu_0\|P\|_{L_{p'}} < 1$, $P(\varphi|z) = \partial T(\varphi|z) / \partial z$, и обозначим через $\mathfrak{M}$ множество векторов $\mathbf{m} = (m_1, m_2)$ таких, что почти всюду $|m_1(z)| + |m_2(z)| \leqslant \mu_0 < 1$ и

$$\mathbf{m}(z) \in L_\lambda(\overline{K}_R), \quad \lambda = p'p / (p' - p), \quad \mathbf{m} \equiv 0, \quad z \notin K_R: \{|z| < R\}.$$

Тогда для любого вектора $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$ существует гомеоморфизм области D_z^+ на некоторую область D_ζ^+ с границей $\Gamma = \sum\limits_{k=0}^{m} \Gamma_k$, Γ_k: $\{|\zeta - \zeta_k| = \rho_k\}$ и гомеоморфизмы $\zeta_k^-(z)$ областей $D_z^-(L_k)$ на $D_\zeta^-(\Gamma_k)$, удовлетворяющие уравнениям ([8])

$$\zeta_{\bar{z}} - m_1(z)\zeta_z - m_2(z)\bar{\zeta}_z = 0,$$

т. е. на $\mathfrak{M}$ определено преобразование $\zeta = H(\mathbf{m}|z)$.

Решение задач I и II отыскивается в виде

$$w(z) = T(\varphi_1|z) + \omega[H(\mathbf{m}|z)]\exp\{T(\varphi_2|z)\}, \tag{12}$$

где функции $\varphi_i(z) \in L_p$, $p > 2$, и $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$ определяются как неподвижные точки ($\varphi_i = \Phi_i$, $\mathbf{m} = \mathbf{M}$) преобразования

$$\Phi_i - m_1(z)P\Phi_i - m_2^i(z)\overline{P\Phi_i} = B_i, \quad \mathbf{M} = \{\mu_1(z, w), \mu_2^1(z, w)\}, \tag{13}$$

где $f^1 = f\exp\{\overline{-2i\,\mathrm{Im}\,T(\varphi_2|z)}\}$, $f^2 = f^1\overline{\omega(H)} / \omega(H)$, $f = m_2, \mu_2, A_2$, $B_1 = A_1T\varphi_1 + A_2^2\overline{T\varphi_1} + A_0$, $B_2 = A_1 + A_2^2$. При этом, поскольку для любых $\varphi_i \in L_p$ и $\mathbf{m} \in \mathfrak{M}$ коэффициенты преобразованного на плоскость $\zeta = H(\mathbf{m}|z)$ условия (4) для аналитической по построению функции $\omega(\zeta)$ обладают свойствами I)—III), то по доказанному существует $\omega(\zeta) = \Omega(\varphi_1, \varphi_2, \mathbf{m}|z)$. Это решение $\omega(\zeta)$ оказывается устойчивым в некоторых весовых нормах относительно изменения функции φ_i и $\mathbf{m}$. Обращая линейные уравнения (13) для Φ_i, получаем преобразование, к которому применима теорема Шаудера. Единственность решений доказывается, как обычно, сведением задачи для разности двух решений к соответствующей однородной задаче в классе аналитических функций.

Институт гидродинамики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
14 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Э. И. Зверович, УМН, 23, в. 3, (141) (1968). [2] Л. Альфрос, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. [3] Ф. Д. Гахов, Краевые задачи, М., 1963. [4] В. Н. Монахов, Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений, ч. II, Новосибирск, 1969. [5] М. А. Лаврентьев, Матем. сборн., 42, 407, 1935. [6] Л. И. Волковыский, Укр. матем. журн., № 139 (1951). [7] И. Н. Векуа, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [8] Chang Li-chien, Acta Math., 13, 43 (1963).