Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 513.88:513.83+517.946 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. БРЫЧКОВ

О ПОРЯДКЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 3 I 1972)

1. Пусть $\mathscr{D}(G)$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций с носителями, содержащимися в ограниченной области $G\subset R^n$, $\mathscr{D}'(G)$ — сопряженное ему пространство обобщенных функций. Обозначим $x=(x_1,\ldots,x_n)$, $x'=(x_1,\ldots,x_m)$, $x''=(x_{m+1},\ldots,x_n)$, $D_i=d/dx_i$, $D_{x'}^{k'}=D_1^{k_1}\ldots D_m^{k_m}$, $k_1+\ldots+k_m=|k'|$, $D_{x''}^{k''}=D_{m+1}^{k_{m+1}}\ldots D_n^{k_n}$, $k_{m+1}+\ldots+k_n=|k''|$.

Определение 1. Будем говорить, что обобщенная функция $f(x)\in\mathscr{D}'(G)$ имеет относительно x' в области G порядок сингулярности $s_{x'}(f)\leqslant k$, если f допускает в G представление

$$f=\sum_{\substack{|k'|\leqslant k\\|k''|\leqslant l}}D_{x'}^{k'}D_{x''}^{k''}f_{k',k''}(x),\tag{1}$$

где $f_{k',k''}(x)$ — обычные, т. е. локально суммируемые в G функции.

Если при этом представление

$$f=\sum_{\substack{|k'|\leqslant k-1\\|k''|\leqslant q}}D_{x'}^{k'}D_{x''}^{k''}g_{k',k''}(x)\tag{2}$$

с обычными функциями $g_{k',k''}(x)$ невозможно, то $s_{x'}(f)=k$.

Если при любых $p_i\geqslant 0$, $i=1,\ldots,m$, $\sum_{i=1}^m p_i=|p'|\leqslant p$, функции $D_{x'}^{p'}f$ допускают представление вида (1) при $|k'|=k_1=\ldots=k_m=0$, то $s_{x'}(f)\leqslant -p\leqslant 0$. Если при этом среди производных $D_{x'}^{p+1}f$ найдется хотя бы одна не допускающая представления (1) при $|k'|=k_1=\ldots=k_m=0$, то будем говорить, что $s_{x'}(f)=-p\leqslant 0$. Если при любом p $s_{x'}(D_{x'}^pf)<0$, то $s_{x'}(f)=-\infty$.

Очевидно, что при $m=n$, т. е. при $x'=x$, порядок сингулярности $s_{x'}(f)$ относительно x' совпадает с обычным порядком сингулярности $s(f)$ [1]. Отметим два свойства $s_{x'}(f)$:

а) $-\infty\leqslant s_{x'}(f)\leqslant s(f)$;

б) если $x'''=(x_{m_1},\ldots,x_{m_r})\subset x'$, то $s_{x'''}(f)\leqslant s_{x'}(f)$.

Пример. $f=\delta(x_1-x_2)\delta(x_3)$; $s_{x_1}(f)=s_{x_2}(f)=-\infty$, $s_{x_3}(f)=1$, $s_{x_1x_2}(f)=1$, $s_{x_2x_3}(f)=s_{x_1x_3}(f)=s(f)=2$.

Справедлива следующая

Теорема 1. а) $s_{x'}(D_if)\leqslant s_{x'}(f)+1$ *при* $i=1,\ldots,m$;

б) $s_{x'}(D_jf)\leqslant s_{x'}(f)$ *при* $j=m+1,\ldots,n$;

в) $s_{x_i}(D_if)=s_x\ (f)+1$,

де $s_{x_i}(f)$ — *порядок сингулярности* f *в* G *относительно* x_i;

г) $s_{x'}(f+g)\leqslant\max[s_{x'}(f),\,s_{x'}(g)]$ *для любых* $f,g\in\mathscr{D}'(G)$;

д) *если* $\alpha(x)$ — *мультипликатор в* $\mathscr{D}(G)$, т. е. $s(\alpha)=-\infty$, *то* $s_{x'}(\alpha f)\leqslant s_{x'}(f)$;

е) *если одна из функций* $f, g \in \mathscr{D}'(G)$ *финитна, то* $s_{x'}(f * g) \leqslant \leqslant s_{x'}(f) + s_{x'}(g)$.

2. В терминах $s_{x'}(f)$ можно описать обобщенные функции $f \in \mathscr{D}'(G)$, имеющие определенную гладкость по части аргументов. Пусть G, G', G'' — области в R^n, R^m, R^{n-m} соответственно и $g_\psi(x') = (F(x', x''), \psi(x''))$ — обобщенная функция, определенная формулой

$$(f(x), \varphi(x')\psi(x'')) = (F(x', x''), \psi(x''), \varphi(x')),$$

где $\varphi(x') \in \mathscr{D}(G')$, $\psi(x'') \in \mathscr{D}(G'')$.

Определение 2. Обобщенная функция $f(x) \in \mathscr{D}'(G)$ принадлежит классу $M^p(G)$ по x', если при любых G', G'', $G' \times G'' \subset G$, для всех $\psi(x'') \in \mathscr{D}(G'')$ $s(g_\psi(x')) \leqslant -p$ в G'. Если $p = \infty$, т. е. $g_\psi(x') \in C^\infty$, то $f(x) \in C^\infty(G)$ по x' (полурегулярные обобщенные функции, см. (2)).

Таким образом, определение класса $M^p(G)$ по x', используемое в теории дифференциальных уравнений, характеризует свойства гладкости обобщенной функции f по x' через свойства в некотором смысле «среднего» $g_\psi(x')$ от f. Однако можно дать непосредственное описание, основанное на следующей теореме.

Теорема 2. *Для того чтобы* $f \in M^p(G)$ *по* x', *необходимо и достаточно, чтобы* $s_{x'}(f) \leqslant -p$.

При $p = +\infty$ это утверждение сформулировано Л. Эренпрайсом (3).

3. Определение 3. Носителем сингулярности $\operatorname{sing\,supp}_{x'} f$ обобщенной функции $f \in \mathscr{D}'(G)$ относительно x' назовем дополнение в G к области, где $s_{x'}(f) = -\infty$.

При $x' = x$ $\operatorname{sing\,supp}_x f$ совпадает с обычным носителем сингулярности $\operatorname{sing\,supp} f$. Из теоремы 2 вытекает следующее

Утверждение. $\operatorname{sing\,supp}_{x'} f$ *совпадает с дополнением к области, в которой* f *бесконечно дифференцируема по* x' *в смысле определения* 2.

Как известно, дифференциальный оператор $P(iD_{x'}, iD_{x''}) = \sum a_{n', n''}(x) D_{x'}^{k'} D_{x''}^{k''}$, где $a_{k', k''}(x) \in C^\infty$, называется частично гипоэллиптическим относительно x', если все решения $u(x) \in \mathscr{D}'(R^n)$ уравнения $P(iD_{x'}, iD_{x''})u = 0$ принадлежат C^∞ по x'.

Теорема 3. *Для того чтобы оператор* $P(iD_{x'}, iD_{x''})$ *был частично гипоэллиптическим относительно* x', *необходимо и достаточно, чтобы для всех* $f \in \mathscr{D}'(R^n)$

$$\operatorname{sing\,supp}_{x'} Pf = \operatorname{sing\,supp}_{x'} f. \tag{3}$$

Доказательство вытекает из теоремы 2 и следующего результата Л. Гординга и Б. Мальгранжа (4): *если* $f \in \mathscr{D}'(R^n)$ *удовлетворяет уравнению* $Pf = v$, *где* $v \in C^\infty$ *по* x' *в смысле определения* 2, *то* $f \in C^\infty$ *по* x'.

При $x' = x$ соотношение (3) описывает гипоэллиптический оператор. Справедлива также следующая

Теорема 4. *Пусть* $Q(iD_x)$ — *дифференциальный полином с постоянными коэффициентами,* $u(x) \in D'(G)$ — *решение уравнения* $Q(iD_x)u = 0$ *в ограниченной области* G. *Если* $u(x) \in C^\infty$ *по* x' (*т. е.* $s_{x'}(u) = -\infty$) *вблизи границы области* G, *то* $u(x) \in C^\infty$ *по* x' *во всей области* G.

В частном случае $x' = x$ эта теорема совпадает с теоремой, доказанной М. С. Аграновичем (5).

4. Определение 4 (6). Говорят, что в обобщенной функции $f(x', x'') \in \mathscr{D}'(G)$ можно фиксировать x' в точке x_0', если существует такая функция $1 \times g(x'') \in \mathscr{D}'(G)$, что соотношение

$$\lim_{\varepsilon \to +0} (f(x_0' + \varepsilon x', x''), \varphi(x')\psi(x'')) = (g(x''), \psi(x'')) \int \varphi(x')\, dx'$$

имеет место для всех $\varphi(x') \in \mathscr{D}(G')$, $\psi(x'') \in \mathscr{D}(G'')$.

Т е о р е м а 5. *Если $s_{x'}(f) \leqslant 0$, то f допускает фиксирование x' почти в каждой точке области G.*

В заключение отметим, что можно ввести понятие порядка $c_{x'}$-сингулярности относительно x', заменяя в формулах (1) и (2) локально суммируемые функции непрерывными и меняя во всех определениях $s_{x'}$ на $c_{x'}$. При этом, если во всех теоремах также заменить $s_{x'}$ на $c_{x'}$, то

1) теоремы 1, 3 и 4 останутся справедливыми;

2) теорема 2 будет описывать обобщенные функции, принадлежащие $C^p(G)$ по x', если в формулировке $M^p(G)$ заменить на $C^p(G)$;

3) теорема 5 будет формулироваться следующим образом: *если $c_{x'}(f) \leqslant 0$ в G, то f допускает фиксирование x' в каждой точке области G.*

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. Е. Ш и л о в, Математический анализ, 2-й спецкурс, М., 1965. [2] L. S c h w a r t z, J. Math. Pures Appl. (9) **36**, 109 (1957). [3] L. E h r e n p r e i s, Am. J. Math., **82**, 522 (1960). [4] L. G å r d i n g, B. M a l g r a n g e, Math. Scand., **9**, 5 (1961). [5] М. С. А г р а н о в и ч, ДАН, № 3, 439 (1959). [6] S. L o j a s i e w i c z, Studia Math., **17**, 1 (1958).