Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 532.031 *ГИДРОМЕХАНИКА*

Ю. С. КОРШУНОВ

ВОЛНЫ УСТАНОВИВШЕГОСЯ ВИДА КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ НА ПОВЕРХНОСТИ БЕСКОНЕЧНО ГЛУБОКОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 4 XI 1971)

Рассмотрим потенциальное волновое движение тяжелой несжимаемой идеальной жидкости. Горизонтальный уровень жидкости примем за плоскость Oxz прямоугольной системы координат $Oxzy$. Ось Oy проведем вертикально вверх. Толщину жидкости в направлении, перпендикулярном плоскости Oxy, т. е. в направлении оси z, считаем равной единице.

Предположим, что в отрицательную сторону оси абсцисс по поверхности жидкости движутся волны установившегося вида со скоростью u. При движении волн жидкость на бесконечной глубине покоится.

Сообщая всей жидкости скорость $+c$ в направлении оси x, переходим от волнового движения жидкости к установившемуся движению самой жидкости. На свободной поверхности жидкости граничная линия тока образует волны с неподвижными вершинами. Жидкость течет вдоль линии тока в направлении оси x со скоростью, которая отыскивается. Среднее значение скорости жидкости на свободной поверхности на длине волны равно скорости u.

Исследователи, которые использовали подвижные оси координат или условие $c = u$, получали свойства, которые отсутствуют у реальных волн, а ряд свойств, присущих реальным волнам, их решения не дали [1-5].

Проекции вектора скорости q жидкости на оси координат определяются формулами

$$U = -\partial\psi / \partial y, \qquad V = \partial\psi / \partial x, \tag{1}$$

$\psi(x, y)$ — функция тока установившегося движения жидкости; функция ψ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\psi = 0. \tag{2}$$

На бесконечности скорость жидкости

$$[-\partial\psi / \partial y]_{y=-\infty} = c, \qquad [\partial\psi / \partial x]_{y=-\infty} = 0. \tag{3}$$

К свободной поверхности приложено давление

$$p = \text{const}. \tag{4}$$

Граничное условие (4) эквивалентно уравнению

$$p = \text{Const} - \rho g y - {}^1/_2\rho q^2, \tag{5}$$

где ρ — плотность жидкости, g — ускорение свободного падения.

При установившемся движении жидкости

$$\text{Const} = \text{const} + {}^1/_2\rho c^2,$$

и уравнение (5) можно записать в виде

$$\rho g y + {}^1/_2\rho q^2 = {}^1/_2\rho c^2. \tag{6}$$

В качестве решения возьмем выражение

$$\psi = -cy + u\beta e^{ky}\cos kx + {}^1/_2 u\beta k^3a^3e^{2ky}\cos 2kx - {}^7/_{24}u\beta k^4a^4e^{3ky}\cos 3kx -$$
$$- {}^1/_{24}u\beta k^5a^5e^{4ky}\cos 4kx + {}^1/_{16}u\beta k^6a^6e^{5ky}\cos 5kx - {}^1/_{48}u\beta k^7a^7e^{6ky}\cos 6kx, \tag{7}$$

где $k = 2\pi / \lambda$, λ — длина волны; $a = \dfrac{u}{c}\,\beta$.

Выражение (7) удовлетворяет уравнениям (2) и (3).

Уравнение профиля волны ($\psi = 0$) имеет вид

$$y = ae^{ky}\cos kx + {}^1/_2k^3a^4e^{2ky}\cos 2kx - {}^7/_{24}k^4a^5e^{3ky}\cos 3kx - \\ - {}^1/_{24}k^5a^6e^{4ky}\cos 4kx + {}^1/_{16}k^6a^7e^{5ky}\cos 5kx - {}^1/_{48}k^7a^8e^{6ky}\cos 6kx. \qquad (8)$$

Постоянство давления вдоль свободной поверхности, определяемой выражением (8), выполняется, если

$$c^2 = g / k + u^2k^2\beta^2 + u^2k^4\beta^2a^2 + 0{,}2u^2k^6\beta^2a^4 + 13{,}65u^2k^8\beta^2a^6. \qquad (9)$$

Условие постоянства давления на свободной поверхности бесконечно глубокой жидкости удовлетворили с точностью до a^4, не прибегая к приближенной замене одних величин другими.

Используя метод последовательных приближений, представим выражение (8) в виде

$$y = {}^1/_2ka^2 + k^3a^4 + {}^{35}/_8k^5a^6 + 19{,}9k^7a^8 + (a + {}^9/_8k^2a^3 - {}^{769}/_{192}k^4a^5 + \\ + 17{,}1k^6a^7)\cos kx + ({}^1/_2ka^2 + {}^{11}/_6k^3a^4 + {}^{311}/_{48}k^5a^6 + 30{,}3k^7a^8)\cos 2kx + \\ + ({}^3/_8k^2a^3 + {}^{267}/_{128}k^4a^5 + 7k^6a^7)\cos 3kx + ({}^1/_3k^3a^4 + {}^{12}/_5k^5a^6 + \\ + 13{,}9k^7a^8)\cos 4kx + ({}^{125}/_{384}k^4a^5 + 2{,}9k^6a^7)\cos 5kx + ({}^{27}/_{80}k^5a^6 + \\ + 3{,}6k^7a^8)\cos 6kx + 0{,}36k^6a^7\cos 7kx + 0{,}41k^7a^8\cos 8kx. \qquad (10)$$

Используя метод последовательных приближений и полагая $\beta = a$, $a = a(1 + {}^9/_8k^2a^2 + {}^{769}/_{192}k^4a^4 + 17{,}1k^6a^6)$ и принимая ae^{ky} вместо a, представим ψ в виде

$$\psi = -cy + uae^{ky}\cos kx + {}^1/_2uka^2e^{2ky}(1 + \cos 2kx) + \\ + {}^1/_3uk^3a^4e^{4ky}(1 + \cos 4kx) + {}^2/_3uk^3a^4e^{4ky} + \\ + {}^{27}/_{80}uk^5a^6e^{6ky}(1 + \cos 6kx) + {}^{323}/_{80}uk^5a^6e^{6ky} + \\ + 0{,}4uk^7a^8e^{8ky}(1 + \cos 8kx) + 19{,}5uk^7a^8e^{8ky} + \ldots \qquad (11)$$

Используя (11), получим для количества движения на длину волны выражение

$$Q_x = \int\limits_{-H}^{0}\int\limits_{0}^{\lambda}\rho\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y} - c\right)dy\,dx = -\rho u\pi a^2(1 - e^{-2kH}) - \\ - \rho u\cdot 2\pi k^2a^4(1 - e^{-4kH}) - \rho u\cdot {}^{35}/_4\pi k^4a^6(1 - e^{-6kH}) - \rho u\cdot 39{,}8\cdot\pi k^6a^8(1 - e^{-8kH}). \qquad (12)$$

Поступательное течение частиц жидкости при волнах является переменным. Среднее значение поступательного течения частиц жидкости равно

$$uk^2a^2e^{-2kH} + 4uk^4a^4e^{-4kH} + 26{,}25uk^6a^6e^{-6kH} + 160uk^8a^8e^{-8kH}. \qquad (13)$$

Первый член выражения (13) был получен Стоксом инженерным способом [1, 4].

В табл. 1 показано, на сколько скорость $\bar{q}$, рассчитанная по формуле (13) для поверхности жидкости $H = 0$ и различной крутизны волн $\delta = h / \lambda$, $h = 2a$, больше скорости, рассчитанной по формуле Стокса.

Наблюдаемое значение скорости поступательного течения частиц воды при ветровых волнах превосходит значение скорости поступательного течения, рассчитанное по формуле Стокса. Это приводило к тому, что поступательное течение жидкости при ветровых волнах разделялось на ветровое течение и волновое поступательное течение жидкости. Решение, полученное в данной работе, показывает, что при ветровых волнах имеется только волновое течение частиц жидкости. Следовательно, для ветрового течения жидкости не остается места. Причиной возникновения ветрового течения жидкости считали тангенциальные силы.

Таблица 1

δ	$\pi^2\delta^2$	$4\pi^4\delta^4$	$26\pi^6\delta^6$	$160\pi^8\delta^8$	$\bar{q}/(u\pi^3\delta^2)$
0,115	0,13	0,068	0,058	0,046	2,34
0,1	0,1	0,04	0,026	0,016	1,82
0,08	0,064	0,016	0,0068	0,0027	1,4
0,05	0,025	0,0025	0,0004	0,00006	1,12
0,01	0,001	$4\cdot10^{-6}$	$3\cdot10^{-8}$	$2\cdot10^{-10}$	1,004

Примем, что энергия волнового движения частиц жидкости перемещается со скоростью $^1/_2u$. Тогда

$$u\pi^2\delta^2(1+4\pi^2\delta^2+26{,}25\pi^4\delta^4+160\pi^6\delta^6)={}^1/_2u \tag{14}$$

при $\delta=0{,}129$.

Если учесть более высокие, чем δ^8, степени, то получим $\delta\sim0{,}115-0{,}12$. Следовательно, волны установившегося вида крутизной $\delta\geqslant0{,}115$ существовать не могут, так как скорость поступательного течения частиц жидкости при этих волнах больше $^1/_2u$, а это должно приводить к изменению вида волн при их распространении.

Поступательное течение частиц жидкости при волнах переменно. Соответствующее волновое давление также является переменным, его среднее значение на глубине $H=\infty$ равно

$$\frac{Q_x\omega}{\lambda}=\rho\frac{k^2u^2a^2}{2}(1+2k^2a^2+{}^{35}/_4k^4a^4+39{,}8\,k^6a^6), \tag{15}$$

$$\omega=uk.$$

Используя выражение (10), имеем

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda\rho gy\,dx=\rho g\frac{ka^2}{2}(1+2k^2a^2+{}^{35}/_4k^4a^4+39{,}8k^6a^6). \tag{16}$$

Из сравнения (16) и (15) получаем

$$u^2=g\,/\,k, \tag{17}$$

Скорость волны с увеличением амплитуды (энергии) волны не увеличивается ([16]). С увеличением амплитуды (энергии) увеличивается скорость c. Поскольку волновое давление является переменным, оно будет производить работу

$$\int[pu]_0^\lambda\,dy. \tag{18}$$

Волновому давлению соответствует возвышение жидкости

$$y=\frac{ka^2}{2}(1+\cos2kx)+\frac{k^3a^4}{3}(1+\cos4kx)+\ldots$$

Рассмотрим первый член правой части

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda\frac{ka^2}{2}(1+\cos2kx)\,dx=\frac{ka^2}{2}.$$

Возвышение, соответствующее волновому давлению, изменяется с двойной частотой по отношению к частоте изменения свободной поверхности. При учете более высоких степеней δ появляются члены $1+\cos4kx$, $1+\cos6kx,\ldots$ В действительности, возвышение поверхности жидкости отсутствует и, следовательно, нет соответствующего переноса жидкости по вертикали. Учитывая это, запишем выражение (18) в виде

$$\int\limits_0^{^1/_2ka^2}\rho\frac{S}{\tau}4\omega^2y\,dy=\rho\nu\frac{\omega^2k^2a^4}{2}, \tag{19}$$

где $\nu=S\,/\,\tau=1$ м²/сек.

Переноса жидкости по вертикали нет и поэтому введена единичная площадь; работу давления отнесли к единице времени.

При решении предполагается, что потери энергии волны, определяемые выражением (19), восполняются.

При шторме в ложе океана возбуждаются «штормовые» микросейсмы ([7]). Вблизи ложа океана волновое движение частиц жидкости отсутствует. Следовательно, за счет действия вязкости передачу энергии от морских волн «штормовым» микросейсмам объяснить нельзя.

Ложе океана является своеобразными весами: при отсутствии морских волн вес жидкости над ложем океана имеет одно значение; когда по поверхности океана распространяются волны, то ложе океана получает от них энергию, что равносильно увеличению веса жидкости. Значит, волны обладают весом, и уже из этого следует, что волны обладают свойствами частиц. Масса покоя у волны отсутствует. При распространении волн вес жидкости увеличивается, а объем жидкости не изменяется. Работа волн над ложем океана тем больше, чем больше скорость поступательного течения частиц жидкости при волнах. Следовательно, чем больше скорость поступательного течения частиц жидкости при волнах, тем больше масса жидкости увеличивается *.

Для вычисления $\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda q^2dx$ используем решение для пологих волн

$$y = \frac{ka^2}{2} + a\cos kx + \frac{ka^2}{2}\cos 2kx + \ldots,$$

$$q^2 = c^2 - 2c^2ky + u^2\beta^2k^2e^{2ky} = c^2 - 2c^2ky + u^2\beta^2k^2(1 + 2ky + \ldots),$$

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda q^2dx = c^2 + u^2\beta^2a^2k^4 = c^2 + \bar{q}^2.$$

Уравнение (6) удовлетворяется, если

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda \rho gy\,dx + \rho\frac{\bar{q}^2}{2} = 0, \quad \Delta p = \rho\frac{\bar{q}^2}{2}. \tag{20}$$

Раньше получали ([4], [5])

$$\frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\lambda q^2dx = c^2; \tag{21}$$

из выражения (21) не следует, что волна обладает свойствами частицы.

Это решение приводит к тому, что за энергию волны берут сумму кинетической энергии и потенциальной энергии; $Q_x = 0$ (имеется только колебательное движение частиц жидкости около некоторого среднего положения); $c = u$ (скорость волны увеличивается при увеличении энергии).

Решение для пологих волн представлялось в Президиум АН СССР 4 V 1967 г.; решение для крутых волн излагалось в докладе на научной конференции в Московском инженерно-строительном институте (март 1970 г.).

Поступило
23 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] W. Stokes, Camb. Trans., 8, 1847 (Papers, 1, 197). [2] Lord Rayleigh, Phil. Mag., (6), 33, 381 (1917). [3] А. И. Некрасов, Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости, 1951. [4] Г. Ламб, Гидродинамика, М.— Л., 1947. [5] Л. Н. Сретенский, Теория волновых движений жидкости, 1936. [6] Ю. С. Коршунов, Изв. АН СССР, сер. геофизич., № 2 (1961). [7] Р. Триккер, Бор, прибой, волнение и корабельные волны, 1969.

* Этот результат докладывался автором в МГИ АН УССР в июне 1961 г.