Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 513.831 *МАТЕМАТИКА*

С. Д. ИЛИАДИС

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКИХ КОНТИНУУМОВ ПРОСТЫМИ КОНЦАМИ КАРАТЕОДОРИ

(Представлено академиком П. С. Александровым 16 XII 1971)

В этой работе с помощью топологического понятия простого конца, введенного в работе [1], изучаются свойства плоских континуумов, связанные с понятием неразложимости. При этом устанавливается связь между простыми концами и так называемой системой нитей, построенной в работе [2].

Простые концы мы будем рассматривать в области $\mathscr{D} = E \setminus K$, где E — плоскость, а K —невырожденный континуум, не разбивающий плоскости.

Последовательность $\{t_n\}$ разрезов (по поводу определений и обозначений, связанных с простыми концами, см., например, [3]) называется цепью, если выполнены следующие условия: 1) $\bar{t}_n \cap \bar{t}_m = \phi$, $n \neq m$; 2) t_n разделяет область $\mathscr{D}$ на две подобласти, одна из которых d_n содержит все разрезы t_{n+k}, $k = 1, 2, 3, \ldots$, а другая содержит t_{n-1}; 3) диаметр t_n стремится к нулю при $n \to \infty$.

Две цепи $\{t_n\}$ и $\{t_n'\}$ называются эквивалентными, если d_n содержит все разрезы t_n', начиная с некоторого, а d_n' — все разрезы t_n, начиная с некоторого. Простым концом области $\mathscr{D}$ назовем всякий максимальный (в смысле содержания) класс эквивалентных цепей.

В работе [4] условие 1) в определении цепи заменено условием: 1′) относительное расстояние между t_n и t_{n+k} в $\mathscr{D}$ положительно. Оставив определение эквивалентности цепей и определение простого конца дословно тем же, авторы [4] получают определение слабого простого конца. При этом доказывается

Утверждение. *Всякий слабый простой конец содержит один и только один простой конец.*

Очевидно, что всякий простой конец содержится в слабом.

Оказывается, условие 1) в определении цепи можно опустить. Заметим только, что из условия 3) следует, что $t_n \cap t_{n+k} = \phi$. При этом приходится изменять определение эквивалентности цепей. Две последовательности разрезов $\{t_n\}$ и $\{t_n'\}$, удовлетворяющие условиям 2) и 3), назовем эквивалентными, если относительное расстояние между d_n и d'_n в $\mathscr{D}$ стремится к нулю, когда $n \to \infty$. Нетрудно доказывается

Лемма 1. *Если цепь $q = \{t_n\}$ эквивалентна цепи $q' = \{t_n'\}$, а цепь $q' = \{t_n'\}$ эквивалентна цепи $q'' = \{t_n''\}$, то цепь q эквивалентна цепи q''.*

Предложение 1. *Всякий простой конец, определенный с помощью цепей, удовлетворяющих только условиям* 2) *и* 3), *содержит один и только один простой конец.*

Рассмотрим теперь систему нитей области $\mathscr{D}$, построенных в работе [2]. Построение нитей, правда, немного в более узком смысле, чем в [2], было впервые отмечено в работе [7], хотя автором получено независимо. Все определения и обозначения из работы [2] используются без упоминания. Обозначим через $L(\mathscr{D})$ пространство нитей. Имеет место

Лемма 2. *Пространство $L(\mathscr{D})$ гомеоморфно окружности.*

Ориентация плоскости определяет ориентацию окружности $L(\mathscr{D})$. В дальнейшем считаем, что плоскость ориентирована.

Нить l будем называть прямолинейной, если существует такая точка $x \in \mathscr{D}$, что $l = x$ в $x \cup [x, k(x)]$. Очевидно, что множество всех прямолинейных нитей всюду плотно в $L(\mathscr{D})$. Две прямолинейные нити l_1 и l_2 назовем эквивалентными, если 1) $\bar{l}_1 \setminus l_1 = \bar{l}_2 \setminus l_2$ и 2) для всех нитей l, заключенных либо между l_1 и l_2, либо между l_2 и l_1, имеем $\bar{l} \setminus l = \bar{l}_1 \setminus l_1$. Будем говорить, что нити l_1 и l_2 (не обязательно прямолинейные) эквивалентны, если либо все нити интервала (l_1, l_2), либо все нити интервала (l_2, l_1) являются прямолинейными нитями, эквивалентными между собой. Следующая лемма показывает, что это определение корректно.

Лемма 3. *Если все нити интервала (l_1, l_2) прямолинейны и эквивалентны между собой и все нити интервала (l_2, l_3) прямолинейны и эквивалентны между собой, то нить l_2 прямолинейна и эквивалентна нитям каждого интервала.*

Таким образом, множество всех нитей разбилось на попарно непересекающиеся классы эквивалентностей. Каждый класс эквивалентностей представляет либо одна нить, либо замкнутый сегмент $[l_1, l_2]$. Нити l_1 и l_2 будем называть граничными нитями соответствующего класса эквивалентностей. Сами нити l_1 и l_2 могут как быть прямолинейными, так и не быть.

Лемма 4. *Если $[l_1, l_2]$ — класс эквивалентностей и $l = [l_1, l_2]$, то $\bar{l}_1 \setminus l_1 = \bar{l}_2 \setminus l_2 = \bar{l} \setminus l$.*

Для данного простого конца p через $I(p)$ будем обозначать его носитель, $\Pi(p)$ — континуум его главных точек, $I^+(p)$, $I^-(p)$ — левое и правое крыло носителя простого конца.

Теорема 1. *Между классами эквивалентных нитей $\tilde{l}$ и простыми концами p существует такое взаимно однозначное соответствие, что если $l \in \tilde{l}$ и класс $\tilde{l}$ соответствует простому концу p, то $\bar{l} \setminus l = \Pi(p)$.*

При доказательстве этой теоремы устанавливается соответствие между классами эквивалентных нитей и простыми концами, определенными с помощью цепей, удовлетворяющих только условиям 2) и 3).

Таким образом, каждая нить — это путь, ведущий к главным точкам некоторого простого конца. Теорема 1 показывает, что эти пути можно выбирать особым образом.

Можно было пойти по другому пути в доказательстве соответствия между классами эквивалентных нитей и простыми концами. Если придерживаться обозначений работы ([5]), можно доказать следующие утверждения.

Лемма 5. *Всякая нить является неприводимым континуумом касания.*

Лемма 6. *Всякий континуум касания содержит некоторую нить.*

Из леммы 6 можно вывести

Следствие. *Всякая точка, достижимая некоторой дугой, достигается и некоторой нитью.*

Многие теоремы, касающиеся свойств плоских континуумов, удобно формулировать с помощью понятий, связанных с простыми концами. При этом, используя связи между простыми концами и нитями, доказательства предпочтительнее давать на языке нитей.

Теорема 2. *Если континуум K не разбивает плоскости и все его простые концы являются концами первого или второго рода (см., например, ([3])), то континуум K обладает свойством неподвижной точки.*

Эта теорема доказывается так же, как и теорема работы ([2]).

Как известно, континуум K называется неразложимым, если его нельзя представить в виде суммы двух собственных подконтинуумов.

Теорема 3. *Для того чтобы континуум K был неразложим, необходимо и достаточно, чтобы существовал такой простой конец p, что либо $I^+(p) = K$, либо $I^-(p) = K$.*

Достаточность теоремы непосредственно вытекает из леммы 8.

Лемма 7. *Если $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — собственные подконтинуумы, то для любого простого конца p континуума K, множество $\Pi(p)$ содержится по крайней мере в одном из континуумов K_1 или K_2.*

Лемма 8. *Если $K = K_1 \cup K_2$, где K_1 и K_2 — собственные подконтинуумы, то для любого простого конца p множества $I^+(p)$ и $I^-(p)$ содержатся в одном из континуумов K_1 или K_2.*

Замечание. Нетрудно построить пример континуума K, разложение его на два собственных подконтинуума K_1 и K_2 и такой асимметрический простой конец p (см., например, ([3])), что $I(p) = K$, следовательно, не содержится ни в K_1, ни в K_2.

Доказательство необходимости в теореме опирается на лемму 10.

Рассмотрим в пространстве простых концов множество $[p_1, p_2]$ простых концов p, лежащих между p_1 и p_2.

Лемма 9. *Множество $I(p_1, p_2) = \bigcup\limits_{p\in[p_1, p_2]} I(p)$ есть континуум.*

Обозначим через χ некоторый гомеоморфизм окружности $r = e^{i\varphi}$, $0 \leqslant \leqslant \varphi < 2\pi$, с пространством простых концов. Через p_n^k обозначим простой конец, соответствующий точке на окружности с аргументом $2\pi k / n$.

Лемма 10. *Если континуум K неразложим, то для любого n найдется такое k, что $I(p_n^k, p_n^{k+1}) = K$.*

Пусть P — пространство концов. Через $P(K)$ обозначим множество всех таких простых концов p, для которых $I(p) = K$. Множество $P(K)$ замкнуто.

Теорема 4. *Множество смежных интервалов к $P(K)$, т. е. множество компонент множества $P \setminus P(K)$ неразложимого континуума K, находится в таком взаимно однозначном соответствии с множеством композант континуума K, имеющих более одной достижимой точки, что если простой конец p принадлежит интервалу α, соответствующему композанте d, то $I(p) \subseteq d$.*

В качестве следствия из теоремы получаем результат С. Мазуркевича (см. ([6])) о счетности множества композант неразложимого континуума, содержащих более одной точки.

Замечание. Назовем подконтинуум K_1 континуума K достижимым, если существует такое множество $\gamma \subseteq E \setminus K$, гомеоморфное полуинтервалу, что $\bar{\gamma} \setminus \gamma = K_1$. Теорема 4 остается в силе, если в ее формулировке от композант потребовать существования двух непересекающихся достижимых подконтинуумов. Следовательно, число таких композант не более чем счетно. Интересно знать, каким будет множество композант, имеющих невырожденный достижимый континуум (см. соответствующий результат Мазуркевича ([6])).

Пусть $\alpha = (p_1, p_2)$ — компонента множества $P \setminus P(K)$, где K — неразложимый континуум. Тогда $I^-(p_2) = \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I(p^i, p_2)$, где $p^i \in \alpha$ и $\lim p^i = p_2$, Аналогично $I^+(p_1) = \bigcap\limits_{i=1} I(p^i, p_1)$, где $p^i \in \alpha$, $\lim p^i = p_1$.

Теорема 5. *Если все простые концы компоненты α являются простыми концами первого рода, то множество $\bigcup\limits_{p\in\alpha} I(p)$ есть уплотнение прямой линии и оно будет всюду плотным в K тогда и только тогда, когда либо $I^+(p_1) = K$, либо $I^-(p_2) = K$.*

Теорема 6. *Для существования неразложимого подконтинуума K_1 в K, содержащего данное открытое множество V, необходимо и достаточно существования такого простого конца p, что либо $I^+(p)$ содержит V, либо $I^-(p)$ содержит V.*

Следствие 1. *Для наследственно разложимых континуума K и любого его простого конца p $I(p)$ — нигде не плотное множество.*

Следствие 2. *Для того чтобы континуум K был суммой конечного числа неразложимых подконтинуумов $K_1, K_2, \ldots, K_m$, необходимо и достаточно существования конечного числа таких простых концов $p_1, p_2, \ldots, p_n$, что $K = \bigcup\limits_{i=1}^{n} I(p_i)$, причем $2n \geqslant m \geqslant n$.*

Для $m = 2$ аналогичный результат в другой формулировке указан в работе ([7]).

Если дано вложение континуума K на плоскости E, то это вложение определяет вложение на плоскости и любого его подконтинуума. Следовательно, мы можем говорить о простых концах подконтинуума, имея в виду индуцированное вложение.

Назовем континуум K континуумом нулевого порядка. Подконтинуум $K' \subseteq K$ назовем подконтинуумом первого порядка, если существует такой простой конец p континуума K, что либо $I^+(p) = K'$, либо $I^-(p) = K'$. Допустим, что мы определили подконтинуумы порядка $\alpha < \alpha_0$, причем так, что если K' является континуумом порядка $\alpha' < \alpha$ и $\alpha' = \alpha'' + 1$, то существует континуум K'' порядка α'', его простой конец $p^{K''}$ такие, что либо $I^+(p^{K''}) = K'$, либо $I^-(p^{K''}) = K'$. Если же $\alpha' < \alpha$ и α' — предельное порядковое число, то для каждого $\alpha'' < \alpha'$ существуют такие подконтинуумы $K^{\alpha''}$, что $K^{\alpha''} \subseteq K^{\alpha'''}$, если $\alpha'' > \alpha'''$ и $\bigcap\limits_{\alpha''<\alpha'} K^{\alpha''} = K'$. Определим континуумы порядка α_0. Если $\alpha_0 = \beta + 1$, то мы скажем, что K' — континуум порядка α_0, если существует подконтинуум K'' порядка β и его простой конец $p^{K''}$, для которых либо $I^+(p^{K''}) = K'$, либо $I^-(p^{K''}) = K'$. Если же α_0 — предельное порядковое число, то K' есть подконтинуум порядка α_0, если для каждого $\alpha' < \alpha_0$ существует континуум $K^{\alpha'}$ порядка α', для которых $K^{\alpha'} \subseteq K^{\alpha''}$, если $\alpha' > \alpha''$ и $\bigcap\limits_{\alpha'<\alpha_0} K^{\alpha'} = K$.

Теорема 7. *Для того чтобы континуум K содержал неразложимый подконтинуум, необходимо и достаточно, чтобы существовало порядковое число α и такой невырожденный подконтинуум K_1, который является одновременно подконтинуумом порядка α и $\alpha + 1$ (следовательно, в силу теоремы 3, и любого высшего порядка).*

Механико-математический факультет
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 X 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. Carathéodory, Math. Ann., 73, № 3, 323 (1913). [2] С. Д. Илиадис, Вестн. Московск. унив., № 4, 66 (1970). [3] Э. Коллингвуд, А. Ловатер, Теория предельных множеств, М., 1971. [4] E. F. Collingwood, G. Piranian, J. Math. Pures Appl., 9, 43, 187 (1964). [5] И. Н. Песин, Сиб. матем. журн., 7, № 5, 1087 (1966). [6] S. Mazurkiewicz, Fund. Math., 14, 107, 271 (1929). [7] H. Bell, Trans. Am. Math. Soc., 128, № 3, 539 (1967).