Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 533.951.8 ***ФИЗИКА***

В. С. ИМШЕННИК

ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГРАНИЦЫ ПЛАЗМЫ С МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ ПРИ УЧЕТЕ ВЯЗКОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 8 X 1971)

Для быстрых процессов в плазме типа пинч-эффекта характерно ускоренное движение границы плазмы с магнитным полем. Если при этом ускорение направлено в сторону плазмы, то в неинерциальной системе координат такая ситуация эквивалентна плазме в гравитационном поле, действующем наружу плазмы. В подобном случае имеет место развитие неустойчивости типа Рэлея — Тэйлора. В рамках идеальной магнитной гидродинамики анализ указанной неустойчивости был дан в известной работе Крускала и Шварцшильда ([1]), изложение которой с учетом возможности разных направлений тангенциального магнитного поля в плазме ($\mathbf{B}_0^p$) и в вакууме ($\mathbf{B}_0^v$) представлено Стиксом ([2]). Для волнового вектора возмущения $\mathbf{k}$, направленного поперек магнитного поля (это возможно, конечно, только при $\mathbf{B}_0^p \| \mathbf{B}_0^v$), инкремент неустойчивости неограниченно возрастает как $\omega \sim k^{1/2}$. Этот случай совпадает с классическим результатом Рэлея и Тэйлора для несжимаемой жидкости ([3]). Неограниченный рост инкремента неустойчивости следует трактовать как следствие физически некорректной постановки задачи. Поэтому для анализа возмущений с короткими длинами волн необходимо отказаться от модели идеальной магнитной гидродинамики и включить в рассмотрение диссипативные эффекты, в первую очередь, вязкость плазмы. Роль вязкости в обычной жидкости исчерпывающим образом описана Чандрасекаром ([4]).

В настоящей заметке мы рассмотрим влияние вязкости на неустойчивость границы плазмы с магнитным полем, сохраняя все исходные предположения известного магнитогидродинамического рассмотрения ([1, 2]). Отметим здесь, что роль вязкости рассматривалась в частном случае стабильной геометрии пинча Тэйлером ([5]), но автор не получил в явном виде соответствующего дисперсионного уравнения *.

В последние годы, благодаря открытию явления плазменного фокуса ([7]) и последующему изучению этого явления ([8, 9]), интерес к неустойчивости границы плазмы с магнитным полем возрос. Выводы линейной теории неустойчивости помогают истолковать получаемые в двумерных расчетах волнообразные возмущения границы плазмы ([10]) (похожие возмущения наблюдаются в экспериментах ([11])), а также понять удивительную симметрию эксперимента с нецилиндрическим z-пинчом в азимутальном направлении ([10]).

В данной заметке мы ограничимся рассмотрением плоской границы плазмы с магнитным полем, причем плазму будем считать несжимаемой, однородной с изотропной вязкостью. Постоянное поле тяжести с ускорением $\mathbf{g}$ будет направлено перпендикулярно границе наружу плазмы.

1. На основе магнитогидродинамических уравнений несжимаемой бесконечно проводящей плазмы ([2]) с учетом вязкости можно получить

---

* Хорошо известно, что гравитационное поле моделирует эффекты кривизны силовых линий магнитного поля. Поэтому анализ стабильной геометрии пинча во многих отношениях аналогичен данной задаче ([1, 3, 6]).

линеаризованные уравнения для амплитуд возмущений вида $\exp i(\mathbf{k}^p \cdot \mathbf{r} - \omega t)$

$$
\begin{gathered}
-i\omega\rho_0 \mathbf{v} = \frac{1}{c}\,\mathbf{j}\times\mathbf{B}_0^p - i\mathbf{k}^p p - \eta_0 (k^p)^2 \mathbf{v},\\
\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}_0^p = 0, \quad \mathbf{k}^p\mathbf{v} = 0, \quad i\mathbf{k}^p c\times\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{j}, \\
\mathbf{k}^p\cdot\mathbf{B} = 0, \quad \mathbf{k}^p c\times\mathbf{E} = \omega\mathbf{B}, \quad i\mathbf{k}^p\cdot\mathbf{E} = 4\pi s,
\end{gathered}
\tag{1}
$$

где $\mathbf{k}^p$ — волновой вектор возмущений внутри плазмы, η_0 — коэффициент вязкости (остальные обозначения совпадают с ([2])).

Из системы уравнений (1) следует дисперсионное соотношение

$$
\left[\frac{(B_0^p)^2}{4\pi\rho_0}(k_\parallel^p)^2 - \omega^2 - i\,\frac{\eta_0}{\rho_0}\,\omega\,(k^p)^2\right](k^p)^2 = 0. \tag{2}
$$

В вакууме дисперсионное соотношение для возмущения с волновым вектором $\mathbf{k}^v$, очевидно, имеет вид ([2])

$$
(k^v)^2 = 0. \tag{3}
$$

Для дальнейшего рассмотрения выберем систему координат так, что граница плазмы с магнитным полем расположена в плоскости xz, а ось y направлена внутрь плазмы. Пусть далее ось z совпадает с направлением невозмущенного магнитного поля в плазме, т. е. $\mathbf{B}_0{}^p = \{0, 0, B_{0z}{}^p\}$, а поле в вакууме имеет две компоненты $\mathbf{B}_0{}^v = \{B_{0x}{}^v, 0, B_{0z}{}^v\}$. Вектор ускорения силы тяжести $\mathbf{g} = \{0, -g, 0\}$, где исходное ускорение плазмы $g > 0$. Невозмущенное решение известно:

$$
p_0 = -\rho_0 g y + P_0, \quad P_0 + \frac{(B_0^p)^2}{8\pi} = \frac{(B_0^v)^2}{8\pi}, \tag{4}
$$

где P_0 — давление на границе, а p_0 — убывающее давление в глубь плазмы.

Граничные условия, как известно, получаются путем интегрирования всей системы уравнений в направлении, перпендикулярном границе ([2]). Пусть $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали, который для невозмущенного состояния направлен по оси y, $\mathbf{n}_0 = \{0, 1, 0\}$. При учете вязкости по сравнению с ([2]) изменяется только условие, соответствующее уравнению движения плазмы:

$$
\frac{1}{c}\,\mathbf{j}^*\times\frac{\mathbf{B}^p + \mathbf{B}^v}{2} + s^*\,\frac{\mathbf{E}^p + \mathbf{E}^v}{2} - \mathbf{n}\,(p - \sigma) = 0, \tag{5}
$$

где σ — вязкий тензор в несжимаемой жидкости, $\sigma_{ik} = \eta_0\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}\right)$, а $\mathbf{j}^*$, s^* — поверхностные плотности тока и заряда соответственно.

2. По аналогии с ([2]) можно записать систему линеаризованных граничных условий для амплитуд возмущения с учетом изменения (5). Путем разрешения этих условий (с использованием (1)) относительно скоростей и давления на границе (при равенстве тангенциальных компонент векторов $\mathbf{k}^p$ и $\mathbf{k}^v$: $k_x{}^p = k_x{}^v = k_x$, $k_z{}^p = k_z{}^v = k_z$) получим в координатном виде

$$
k_x v_y + k_y^p v_x = 0; \tag{6}
$$

$$
\begin{gathered}
\frac{(B_{0z}^p)^2}{\omega}(k_x v_x + k_y^p v_y) + \frac{(k_x B_{0x}^v + k_z B_{0z}^v)^2}{\omega k_y^v}\, v_y + \\
+ 4\pi p - 4\pi i\left(\frac{\rho_0 g}{\omega} + 2\eta_0 k_y^p\right) v_y = 0;
\end{gathered}
\tag{7}
$$

$$
k_z v_y + k_y^p v_z = 0, \tag{8}
$$

причем, согласно (3), $k_y{}^v = -i\sqrt{k_x{}^2 + k_z{}^2} = -ik$. Заметим, что для исключенных в ходе вывода (6)—(8) граничных y-компонент магнитного поля сохраняется соотношение из (2)

$$\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{B}^v = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0^v,$$
$$\mathbf{n}_0\cdot\mathbf{B}^p = -\mathbf{n}\cdot\mathbf{B}_0^p, \qquad (9)$$

означающее, что силовые линии искривляются параллельно границе.

В плазме v_x, v_y, v_z и p связаны неиспользованными до сих пор уравнениями несжимаемости и движения. Из уравнения несжимаемости и продольной составляющей уравнения движения v_z и p выражаются через v_x и v_y. Две поперечные составляющие уравнения движения дают два соотношения между оставшимися компонентами v_x и v_y. С помощью дисперсионного уравнения (2) можно разрешить эти соотношения для обоих видов возмущений. Для поверхностных волн (с индексом 1), когда $(k^p)^2 = 0$, т. е.

$$(k_y^p)_1 = ik, \qquad (10)$$

из указанных соотношений получается одна связь

$$v_{x1} = -iv_{y1}k_x/k. \qquad (11)$$

Для альвеновских волн (с индексом 2), когда обращается в нуль квадратная скобка (2), т. е.

$$(k_y^p)_2 = i\left(k^2 - i\frac{\omega\rho_0}{\eta_0} + i\frac{k_z^2(B_{0z}^p)^2}{4\pi\eta_0\omega}\right)^{1/2}, \qquad (12)$$

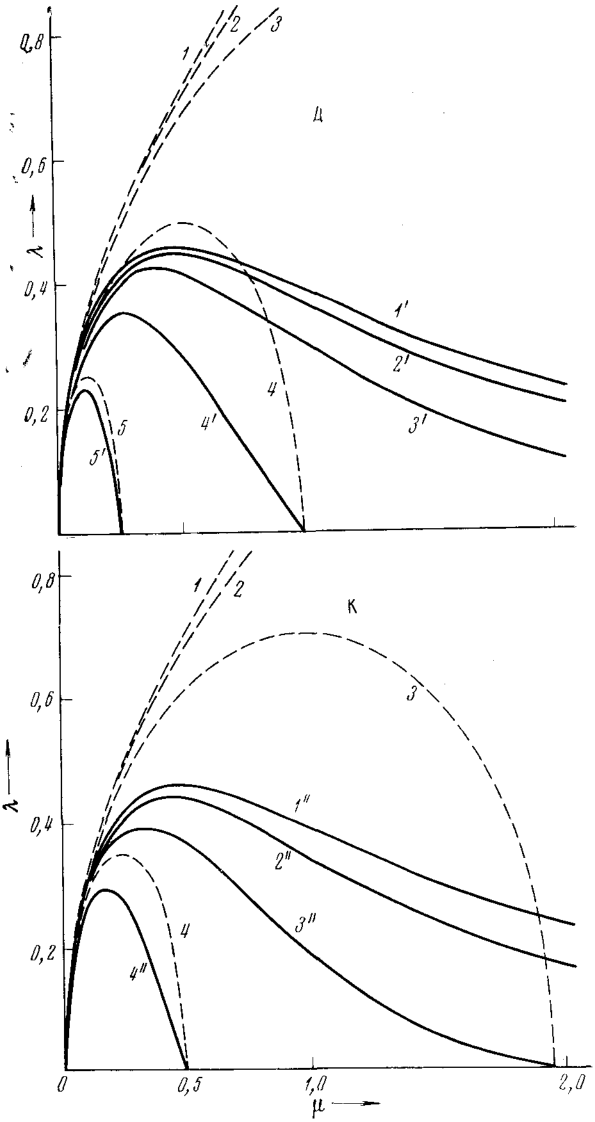

Рис. 1. Зависимость безразмерного инкремента λ от безразмерного волнового числа μ в случае сильного скинирования (Д) и в случае равенства внутреннего и внешнего полей (К) при различных значениях параметра β (18): *1*, *1'*, *1''* — 0; *2*, *2'*, *2''* — 0,25; *3*, *3'*, *3''* — 0,5; *4*, *4'*, *4''* — 1,0; *5*, *5'* — 2,0

оба соотношения равны нулю тождественно, другими словами, v_{x2} и v_{y2} являются независимыми величинами. Ясно, что три граничных условия (6) — (8) могут быть однозначно удовлетворены, потому что общее решение в плазме как раз задается тремя независимыми величинами v_{y1}, v_{y2}, v_{x2}.

Введя обозначения

$$b^p = B_{0z}^p(4\pi\rho_0)^{-1/2}, \quad b_i^v = B_{0i}^v(4\pi\rho_0)^{-1/2}, \quad i = x, z, \quad \varkappa_0 = \eta_0/\rho_0, \qquad (13)$$

получим тогда условие разрешимости системы линейных уравнений

(6) — (8)

$$[\omega^2 + gk - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}^v)^2 - k_z^2(b^p)^2]\left[\frac{\omega^2}{k^2} - \frac{k_z^2}{k^2}(b^p)^2\right] -$$
$$- 4i\omega\varkappa_0[k(k_y^p)_2\,\omega\varkappa_0 - \omega^2 - i\omega k^2\varkappa_0 + k_z^2(b^p)^2] = 0, \qquad (14)$$

где $(k_y{}^p)_2$ определено в (12).

В случае равных нулю магнитных полей из (12) и (14) следует дисперсионное уравнение из ([4]). Наоборот, в отсутствие вязкости мы приходим к уравнению из ([2]).

3. Общее дисперсионное уравнение (14) удобно записать в безразмерных переменных μ, μ_i и λ, которые будут определены, как в ([4]):

$$k = \mu(g/\varkappa_0^2)^{1/3}, \quad k_i = \mu_i(g/\varkappa_0^2)^{1/3}, \quad i = x, z, \quad \omega = i\lambda(g^2/\varkappa_0)^{1/3}. \qquad (15)$$

Еще можно ввести безразмерные параметры

$$\alpha_z = (b^p)(\varkappa_0 g)^{-1/3}, \quad \beta_i = (b_i^v)(\varkappa_0 g)^{-1/3}, \quad i = x,\ z. \qquad (16)$$

Уравнение (14) с учетом (12) тогда запишется в виде

$$(\lambda^2 - \mu + \mu_i^2\beta_i^2 + \mu_z^2\alpha_z^2)(\lambda^2 + \mu_z^2\alpha_z^2) +$$
$$+ 4\lambda\mu^2[-\lambda\mu(\mu^2 + \lambda + \mu_z^2\alpha_z^2/\lambda)^{1/2} + \lambda^2 + \lambda\mu^2 + \mu_z^2\alpha_z^2] = 0. \qquad (17)$$

Решение $\lambda(\mu, \mu_z)$, зависящее от параметров α_z, β_x, β_z, означает неустойчивость, если $\lambda > 0$.

Ниже мы дадим решение уравнения (17), несколько ограничивая область изменения параметров. Положим, что внешнее магнитное поле имеет лишь z-компоненту, $\beta_x = 0$, причем оно либо равно внутреннему полю, $\beta_z = \alpha_z$ (случай К), либо внутреннее поле вообще отсутствует, $\alpha_z = 0$ (случай Д). При таких ограничениях можно ввести параметры α и β вместо α_z и β_z так, чтобы λ зависело только от одной переменной μ. Обозначим

$$\mu_z = \gamma\mu, \quad \alpha = \gamma\alpha_z, \quad \beta = \gamma\beta_z = \frac{k_z}{k}\frac{B_{0z}^v}{(4\pi\rho_0)^{1/2}}(\varkappa_0 g)^{-1/3}. \qquad (18)$$

На рис. 1 сплошными линиями изображены численные решения уравнения (17) для ряда значений β в случае Д ($\alpha = 0$) и в случае К ($\alpha = \beta$). Для сравнения пунктирными линиями даны кривые инкремента $\lambda = \lambda'$ при отсутствии вязкости ([2]). Параметр β может изменяться от 0 до ∞. Интересно отметить, что граница обращения λ в нуль не зависит от наличия вязкости. Рисунки показывают, как вязкость уменьшает величину инкремента, пока параметр β не становится достаточно большим.

Автор выражает искреннюю благодарность акад. М. А. Леонтовичу, В. Ф. Дьяченко, Н. В. Филиппову, В. Д. Шафранову за полезное обсуждение этой заметки.

Институт прикладной математики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
30 IX 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Kruskal, M. Schwarzschild, Proc. Roy. Soc. A, **223**, 348 (1954). [2] Т. Стикс, Теория плазменных волн, М., 1965. [3] А. Б. Михайловский. Теория плазменных неустойчивостей, **2**, М., 1971. [4] S. Chandrasekhar, Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford, 1961, Ch. X. [5] R. J. Tayler, Proc. Phys. Soc. B, **70**, 31 (1957). [6] В. Д. Шафранов, Сборн. Физика плазмы и проблема УТР, 2, 1958, стр. 130. [7] Н. В. Филиппов и др., Nucl. Fusion, Part 2, Suppl. (1962). [8] N. V. Filippov и др., Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, **2**, 21 (1969). [9] В. Ф. Дьяченко, В. С. Имшенник, ЖЭТФ, **56**, 1766 (1969). [10] V. I. Agafonov et al., IV Conf. on Research in Plasma Physics and Controlled Thermonuclear Reactions, Medison, CN-171, 1971. [11] В. П. Виноградов и др., *Теплофизика высоких температур*, **5**, 343 (1967).