Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 517.949.12 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. КАЗЬМИН

К ПРОБЛЕМЕ МОМЕНТОВ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 20 XII 1971)

Пусть $A(D)$ — пространство функций, аналитических в односвязной области D комплексной плоскости, причем $\infty \notin D$. Топология в этом пространстве определяется равномерной сходимостью на произвольном компакте K, $K \subset D$. Обозначим через $A^*(D)$ сопряженное с $A(D)$ пространство. $A^*(D)$ отождествляется с пространством функций, аналитических на бесконечности и обладающих свойствами: 1) $\gamma(\infty) = 0$ для $\forall \gamma(z) \in A^*(D)$; 2) множество особенностей (это всегда компакт) каждой функции $\gamma(z) \in A^*(D)$ принадлежит области D.

Общая проблема моментов заключается в следующем. Заданы: 1) целое число p, $p \geqslant 1$; 2) целые числа l_s, $0 \leqslant l_s \leqslant p-1$; $s = 0, 1, \ldots, p-1$; 3) функции $0 \not\equiv A_s(t) \in A(D)$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$; 4) функция $W(t) \in A(D)$, однолистная в области D; 5) совокупность комплексных чисел $\mathfrak{A} = \bigcup\limits_{s=0}^{p-1} \{a_{ns}\}_{n=0}^{\infty}$.

Требуется найти множество всех функций $\gamma(t) \in A^*(D)$, удовлетворяющих бесконечной системе уравнений

$$L_{ns}(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} [W(t)]^{np+l_s} A_s(t)\, \gamma(t)\, dt = a_{ns}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{1}$$

$$s = 0, 1, \ldots, p-1.$$

Контуром интегрирования в (1) служит замкнутая жорданова кривая $\Gamma = \Gamma(\gamma)$, $\Gamma \cup \operatorname{int} \Gamma \subset D$, $\gamma(t) \in A^*(\operatorname{int} \Gamma) \subset A^*(D)$.

В том случае, когда контур интегрирования в (1) зафиксирован, соответствующую задачу (1) будем называть Γ-проблемой моментов.

Ясно, что далеко не для всякой априори заданной совокупности $\mathfrak{A}$ система (1) имеет решения $\gamma(t) \in A^*(D)$. Поэтому числовую совокупность $\mathfrak{A}$ назовем D-допустимой для задачи (1), если $\exists \gamma(t) \in A^*(D)$, для которой выполняются соотношения (1).

Решение задачи (1) состоит в нахождении ответов на следующие два вопроса:

I) Каковы необходимые и достаточные условия D-допустимости (int Γ-допустимости) совокупности $\mathfrak{A}$?

II) Пусть $\mathfrak{A}$ является D-допустимой (int Γ-допустимой) совокупностью. Как по числам $\{a_{ns}\}$ («моментам») восстановить множество всех функций $\gamma(t) \in A^*(D)$ $(\gamma(t) \in A^*(\operatorname{int} \Gamma))$, удовлетворяющих равенствам (1)?

В работах [1, 2] перечислено большое количество задач интерполяции, являющихся частыми случаями проблемы моментов (1).

Множество E комплексной плоскости назовем α-инвариантным, если поворот E на угол α вокруг начала координат оставляет его неизменным. Факт α-инвариантности E коротко будем записывать таким образом: $E \in \operatorname{Inv}(\alpha)$. Итак, $E \in \operatorname{Inv}(\alpha) \Leftrightarrow e^{i\alpha}E = E$.

В статьях [1, 2] нами дано исчерпывающее решение Γ-проблемы моментов (1) для случая, когда $W(\Gamma \cup \operatorname{int} \Gamma) = \Gamma_w \cup \operatorname{int} \Gamma_w \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$. Однако оставался открытым вопрос о решении Γ-задачи (1) при $W(\Gamma \cup \operatorname{int} \Gamma) \notin \operatorname{Inv}(2\pi/p)$. Рассмотрению этого вопроса и посвящена наша заметка.

Определение. Односвязную область $\operatorname{int} \Gamma$, лежащую в конечной части комплексной плоскости, назовем *погружаемой* для данной проблемы моментов (1), если $\exists$ замкнутый контур C такой, что $\operatorname{Int} \Gamma \subset \operatorname{int} C \subset D$ и $W(C \cup \operatorname{int} C) = C_w \cup \operatorname{int} C_w \in \operatorname{Inv}(2\pi/p)$.

Важную роль при решении общей проблемы моментов играет детерминант $\Delta(w) = \det\|\tilde{A}_s(w\delta^k)\delta^{k(l_s+1)}\|_{s,k}^{p-1}$, где $\delta = \exp(2\pi i / p)$. $\tilde{A}_s(w) = A_s(Z(w))Z'(w)$, а $z = Z(w)$ — функция, обратная к функции $w = W(z)$ $(Z(W(D)) = D)$. Предполагается, что $\Delta(w) \not\equiv 0$. Ранее доказано, что если $w = \hat{w} \neq 0$, $\hat{w} \in \operatorname{int} C_w \in \operatorname{Inv}(2\pi / p)$, — нуль кратности $m(\hat{w})$ детерминанта $\Delta(w)$, то нулем (той же кратности!) является и любая из точек цикла $\{\hat{w}\delta^k\}_{k=0}^{p-1}$, $k = 0, 1, \ldots, p-1$ $(\delta = \exp(2\pi i / p))$. В дальнейшем для простоты считаем, что $\Delta(w) \neq 0$ при $w \in \Gamma_w = W(\Gamma)$ и $w \in C_w = W(C)$; это предположение нисколько не умаляет общности. Пусть $\varkappa(C)$ — число нулей $\Delta(w)$ в области $\operatorname{int} C_w$ с учетом их кратностей, а через $n(E)$ будем обозначать число элементов конечного множества E.

Теорема 1. I) *Для того чтобы числовая совокупность* $\mathfrak{A} = \bigcup_{s=0}^{p-1} \{a_{ns}\}_{n=0}^{\infty}$ *была* $\operatorname{int}\Gamma$-*допустимой для* Γ-*проблемы моментов* (1) *с погружаемой в* $\operatorname{int} C \subset D$, $W(C \cup \operatorname{int} C) = C_w \cup \operatorname{int} C_w \in \operatorname{Inv}(2\pi / p)$, *областью* $\operatorname{int}\Gamma$, *необходимо и достаточно, чтобы*

1) *функции* $a_s(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n_s}}{w^{np+l_s+1}} \in A^*(\operatorname{int} C_w)$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$;

2) *функция* $\Delta_0(w)$, *получаемая из* $\Delta(w)$ *заменой в детерминанте* $\Delta(w) = \det\|\tilde{A}_s(w\delta^k)\delta^{k(l_s+1)}\|_{s,k=0}^{p-1}$ *первого столбца* $(\sim k = 0)$ *колонкой* $\|pa_s(w)\|_{s=0}^{p-1}$ *была аналитической в замкнутой области* $\bar{B}_w$, $B_w = \operatorname{int} C_w \cap \cap \operatorname{ext}\Gamma_w$ (*не теряя общности, всегда будем предполагать, что* B_w — *двусвязная область*);

3) *имела место совместность следующей алгебраической системы линейных уравнений относительно* $\varkappa(C)$ *неизвестных* $\{\Phi^{+(j)}(\hat{w}\delta^k)\}$:

$$\Phi^{+(j)}(\hat{w}\delta^k) = \Delta_0^{(j)}(\hat{w}\delta^k) \quad \forall \hat{w}\delta^k \in B_w$$

(*правые части равенств в этой строке известны*), (S)

$$\frac{d^j}{dw^j}\left[\sum_{k=0}^{p-1} \tilde{A}_s(w\delta^k)\,\delta^{k(l_s+1)}(-1)^{-k(p-k)}\delta^{k[\sum_{q=0}^{p-1} l_q]}\Phi^+(w\delta^k)\right] = 0 \text{ для } \forall \hat{w} \in \operatorname{int} C_w,$$

$$s = 0, 1, \ldots, p-1,$$

где $j = 0, 1, \ldots, m(\hat{w}) - 1$ $(\Delta^{(j)}(\hat{w}) = 0;\ \Delta^{(m(\hat{w}))}(\hat{w}) \neq 0)$, *а* $\hat{w}$ — *произвольный представитель цикла нулей* $\{\hat{w}\delta^k\}_{k=0}^{p-1} \subset \operatorname{int} C_w$ *определителя* $\Delta(w)$; *через* $\Phi^+(w)$ *в* (S) *обозначена голоморфная в* $C_w \cup \operatorname{int} C_w$ *функция*

$$\Phi^+(w) = \frac{\Delta(w)}{\pi_C(w)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{C_w} \frac{\Delta_0(t)\,\pi_C(t)}{\Delta(t)(t-w)}\,dt + P_{\varkappa(C)-1}(w)\right], \quad w \in \operatorname{int} C_w, \tag{2}$$

где $\pi_C(w) = w^{m(0)} \prod_{\hat{w} \in \operatorname{int} C_w} (w^p - \hat{w}^p)^{m(\hat{w})}$, *а* $P_{\varkappa(C)-1}(w)$ — *полином степени* $\leqslant \varkappa(C) - 1$.

II) *Для любой* $\operatorname{int}\Gamma$-*допустимой совокупности* $\mathfrak{A}$ *общее решение* Γ-*проблемы моментов* (1) *дается формулой*

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\gamma^-(W(t))\,dt}{t-z}, \quad z \in \operatorname{ext}\Gamma;$$

$$\gamma^-(w) = \frac{1}{\pi_C(w)}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_w} \frac{\Delta_0(t)\,\pi_C(t)}{\Delta(t)(t-w)}\,dt + P_{\varkappa(C)-1}(w)\right], \quad w \in \operatorname{ext}\Gamma_w,$$

где $\pi_C(w) = w^{m(0)} \prod_{\hat{w} \in \operatorname{int} C_w} (w^p - \hat{w}^p)^{m(\hat{w})}$, *а* $P_{\varkappa(C)-1}(w)$ — *произвольный полином* (*степени* $\leqslant \varkappa(C) - 1$), *принадлежащий множеству* $\mathscr{P}_{\varkappa(C)-1}$, *которое* *может быть описано следующим образом. Каждое решение* $\varphi = \{\Phi^{+(j)}(\hat{w}\delta^k)\}$, $n(\varphi) = \varkappa(C)$, *системы* (S), *согласно формуле* (2), *однозначно определяет* $\varkappa(C)$ *значений* $\{P^{(j)}_{\varkappa(C)-1}\ (\hat{w}\delta^k)\}$, *что, в свою очередь, единственным образом определяет полином* $P_{\varkappa(C)-1}(w)$ *степени* $\leqslant \varkappa(C) - 1$, *который вместе с соответствующими своими производными в точках* $\hat{w}\delta^k$ *принимает указанные значения* $\{P^{(j)}_{\varkappa(C)-1}\ (\hat{w}\delta^k)\}$ (*Эрмит*) ($\mathscr{P}_{\varkappa(C)-1}$ — *множество всевозможных таких полиномов,* $\mathscr{P}_{\varkappa(C)-1} = \{P_{\varkappa(C)-1}(w)\}_\varphi, \varphi \in S$).

Теорема 2 (единственности). *Если* $0 \notin \operatorname{int}\Gamma_w$, $\Gamma_w = W(\Gamma)$, *то* Γ-*проблема моментов* (1) *с погружаемой в* $\operatorname{int} C \subset D$, $W(C \cup \operatorname{int} C) = C_w \cup \operatorname{int} C_w \in \operatorname{Inv}(2\pi / p)$ *областью* $\operatorname{int}\Gamma$ *тогда и только тогда имеет единственное решение, когда*

$$\operatorname{rank} \| \bar{A}_s(\hat{w}\delta^k)\, \delta^{k(l_s+1)} \|_{\substack{s=0,1,\ldots,p-1 \\ \hat{w}\delta^k \in \operatorname{int}\Gamma_w}} = n(\{\hat{w}\delta^k\}_{k=0}^{p-1} \cap \operatorname{int}\Gamma_w) \tag{3}$$

для $\forall \hat{w} \neq 0$, $\Delta(\hat{w}) = 0$, *с циклом* $\{\hat{w}\delta^k\}_{k=0}^{p-1} \subset \operatorname{int} C_w$, *имеющим непустое пересечение с областью* $\operatorname{int}\Gamma_w$.

Если $0 \in \operatorname{int}\Gamma_w$, *то* Γ-*проблема моментов* (1) *с погружаемой в* $\operatorname{int} C \subset D$, $C_w \cup \operatorname{int} C_w \in \operatorname{Inv}(2\pi / p)$, *областью* $\operatorname{int}\Gamma$, *тогда и только тогда имеет единственное решение, когда одновременно выполняются условия* (3) *и*

$$\sum_{s=0}^{p-1} l_s \leqslant \frac{p(p-1)}{2}, \qquad \Delta^{\left(\frac{p(p-1)}{2} - \Sigma l_s\right)}(0) \neq 0.$$

Следствие 1. *Общая проблема моментов* (1) *с областью* D, *обладающей свойством* $W(D) = G \in \operatorname{Inv}(2\pi / p)$, *тогда и только тогда* **имеет** *единственное решение, когда одновременно выполняются следующие условия:* 1) $\Delta(w) \neq 0$ *для* $\forall w \neq 0$, $w \in G$; 2) $\sum_{s=0}^{p-1} l_s \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$; 3) $\Delta^{\frac{p(p-1)}{2} - \Sigma l_s}(0) \neq 0$.

Следствие 1 в неявном виде содержится в статьях ([1], [2]); оно является окончательным результатом, подводящим итог исследованиям работы ([3]).

В качестве одного из примеров, иллюстрирующих полученные здесь результаты, служит классическая общая задача Лидстона о восстановлении целой функции экспоненциального типа $F(z)$ по заданным значениям ее производных

$$F^{(pn+l_s)}(a_s) = a_{ns}, \quad n = 0, 1, \ldots, \quad s = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{L}$$

которые с помощью преобразования Бореля могут быть представлены в виде

$$F^{(pn+l_s)}(a_s) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma t^{pn-l_s} e^{a_s t} \gamma_F(t)\, dt = a_{ns}, \quad n = 0,1,\ldots, \tag{LΓ}$$

$$s = 0, 1, \ldots, p-1,$$

где $\gamma_F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{F^{(n)}(0)}{t^{n+1}} \in A^*(\operatorname{int}\Gamma)$ является функцией, ассоциированной по Борелю с $F(z)$.

Решение задачи (L) равносильно отысканию множества решений $\gamma_F(t) \in A^*(\operatorname{int}\Gamma)$ системы (LΓ). Поэтому задача Лидстона эквивалентна Γ-проблеме моментов (LΓ) с погружаемой областью $\operatorname{int}\Gamma$. Теоремы 1 и 2 позволяют дать исчерпывающее решение задачи (L) для любого класса целых функций экспоненциального типа $\{F(z)\}$ с $\operatorname{supp}\gamma_F \subset \operatorname{int}\Gamma$, что является завершением многочисленных предшествовавших исследований, относящихся к задаче (L) см., например, ([4-16])). Мы не станем приводить результаты общего характера, относящиеся к задаче (L), а остановимся лишь на одном частном случае этой задачи.

Рассмотрим задачу (L) при условии $\sum l_s = \frac{p(p-1)}{2}$. Выписав для ($L_Г$) детерминант $\Delta_L(z) = \det\|e^{\alpha_s \delta^k z} \delta^{k(l_s+1)}\|_{s,k=0}^{p-1}$, с помощью теоремы 2 без труда убеждаемся в том, что задача (L) при $\sum l_s = \frac{p(p-1)}{2}$ тогда и только тогда имеет единственное решение в классе целых функций роста не выше первого порядка и минимального типа, когда $\{l_s\}_{s=0}^{p-1} = \{s\}_{s=0}^{p-1}$. Не теряя общности, можно считать, что в рассматриваемом случае $l_s = s$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$. Отметим теперь следующие усиления результатов А. О. Гельфонда и В. Л. Гончарова ([4–6]).

Для того чтобы Г-проблема ($L_Г$) с $l_s = s$ и $\alpha_s = s$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$, имела единственное решение необходимо и достаточно, чтобы область $\operatorname{int}Г$ *не содержала ни одной комплексно сопряженной пары точек.*

$$\left\{\alpha_{nq}^{\pm} = \frac{\pi(n-q/p)}{\sin(\pi q/p)} \exp\left(\pm\frac{i\pi q}{p}\right)\right\}, \quad q = 1, 2, \ldots, p-1; \quad n = 1, 2, \ldots,$$

Аналогичного вида результаты могут быть получены для задачи о восстановлении $F(z) \in [1; \operatorname{int}Г)$ по заданным «моментам»: $F^{(pn)}(s) = a_{ns}$, $n = 0, 1, \ldots, s = 0, 1, \ldots, p-1$; роль $\alpha_{nq}^{\pm}$ из (G) здесь играют точки
$$\left\{\frac{\pi n}{\sin(\pi q/p)} \exp\left(\pm\frac{i\pi q}{p}\right)\right\}, \quad q = 1, 2, \ldots, p-1, \; n = 1, 2, \ldots$$ ([4, 7–16]).

В заключение остановимся на следующем континуальном аналоге однородной задачи (L_0): найти множество всех целых функций экспоненциального типа $F(z) \in [1; \operatorname{int}Г)$, Г фиксировано ($F \in [1; \operatorname{int}Г) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \gamma_F \in A^*(\operatorname{int}Г) \Leftrightarrow \operatorname{supp}\gamma_F \subset \operatorname{int}Г$), являющихся решениями дифференциального уравнения
$$d^pF(z)/dz^p - \lambda^pF(z) = 0, \quad \lambda \neq 0, \tag{L_d}$$
и удовлетворяющих условиям $F^{(l_s)}(\alpha_s) = 0$, $s = 0, 1, \ldots, p-1$, $0 \leqslant l_s \leqslant \leqslant p-1$.

Полученные здесь результаты позволяют утверждать, что 1) при $0 \notin \operatorname{int}Г$ классы единственности $[1; \operatorname{int}Г)$ задачи (L_d) и соответствующей (L_d) задачи (L) всегда совпадают; 2) тот же факт имеет место и при

$0 \in \operatorname{int}Г$, если $\sum l_s \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$ и $\Delta_L^{\left(\frac{p(p-1)}{2} - \Sigma l_s\right)}(0) \neq 0$.

В том случае, когда все нули $\hat{z} \neq 0$ детерминанта $\Delta_L(z)$ являются простыми, общие решения задач (L_d) и (L_0) в классе $[1; \operatorname{int}Г)$ 1) при $0 \notin \operatorname{int}Г$ всегда совпадают, а 2) при $0 \in \operatorname{int}Г$ совпадают тогда и только тогда, когда $\sum l_s \leqslant \frac{p(p-1)}{2}$ и $\Delta^{\left(\frac{p(p-1)}{2} - \Sigma l_s\right)}(0) \neq 0$. Сформулированные предложения о задачах (L_d) и (L) существенно дополняют результаты работы ([7]).

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
18 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ю. А. Казьмин, ДАН, 194, № 6 (1970). [2] Ю. А. Казьмин, Proc. of the Conference on the Constructive Theory of Functions. Budapest, 1969. [3] R. E. De Mar, Duke Math. J., 37, № 1 (1970). [4] А. О. Гельфонд, Исчисление конечных разностей, М.—Л., 1952. [5] В. Л. Гончаров, Ann. Ecole Norm. Sup., 47 (1932). [6] В. Л. Гончаров, Сообщ. Харьковск. матем. общ., сер. 4, 5 (1932). [7] H. Poritsky, Trans. Am. Math. Soc., 34 (1932). [8] G. J. Lidstone, Proc. Edinburgh Math. Soc., 40 (1922); ibid., 2 (1930). [9] J. M. Whittaker, Interpolatory Function Theory, Cambridge, 1935. [10] J. M. Schoenberg, Bull. Am. Math. Soc., 42 (1936). [11] S. Schmidli, Thesis. Zurich, 1942. [12] B. P. Boas, Duke, Math. J., 10 (1943). [13] R. C. Buck, Trans. Am. Math. Soc., 64 (1948). [14] R. C. Buck, Proc. Am. Math. Soc., 6 (1955). [15] Ю. А. Казьмин, ДАН, 173, № 4 (1967). [16] Ю. А. Казьмин, Изв. АН СССР, 30, № 2 (1969).