Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 519.21 *МАТЕМАТИКА*

А. Г. НАКОНЕЧНЫЙ

О МОМЕНТАХ СТАРШИХ ПОРЯДКОВ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 27 XII 1971)

В работах А. Н. Ширяева (1), В. П. Леонова (2) и др. изучались свойства моментов старших порядков. Вопрос о том, какими необходимыми и достаточными условиями должна обладать функция, для того чтобы быть моментной старшего порядка, оставался невыясненным. Эта задача связана со специальной урезанной проблемой моментов в бесконечномерном пространстве, которая в случае конечномерного пространства рассматривалась в работе (3).

В заметке указываются такие условия для функций, удовлетворяющих некоторым ограничениям.

Пусть L^{2r} — линейное пространство однородных полиномов степени $2r$ от n-переменных; L_+^{2r} — множество положительных однородных полиномов, принадлежащих L^{2r}.

Если $m_{i_1,\ldots,i}$ — некоторая последовательность, то определим в L^{2r} линейный функционал

$$m(P) = \sum_{i_1,\ldots,i_{2r}=1}^{n} m_{i_1,\ldots,i_{2r}} a_{i_1,\ldots i_{2r}},$$

где

$$P(x) = \sum_{i_1,\ldots,i_{2r}=1}^{n} a_{i_1,\ldots,i_{2r}} x_{i_1} \times \ldots \times x_{i_{2r}}.$$

Функционал $m(P)$ называется положительным, если $m(P) \geqslant 0$ для $P(x) \in L_+^{2r}$. Пусть K — компакт, принадлежащий R^n, $L^{2r}(K)$ — линейное подпространство функций,

$$\tilde{P}(x) = P(x) + a, \quad L_+^{2r} = \{\tilde{P}\colon \tilde{P}(x) \geqslant 0, \ x \in K\},$$
$$m_1(\tilde{P}) = m(P) + a.$$

Функционал $m_1(\tilde{P})$ называется положительным относительно компакта K, если $m_1(\tilde{P}) \geqslant 0$, когда $\tilde{P}(x) \geqslant 0$.

Теорема 1. *Для того чтобы последовательность* $\{m_{i_1,\ldots,i_2}\}_1^n$ *допускала представление*

$$m_{i_1,\ldots,i_{2r}} = \int_K x_{i_1} \times \ldots \times x_{i_{2r}} \nu(dx),$$

где $\nu(\cdot)$ — *нормированная неотрицательная мера на* σ-*алгебре борелевских множеств компакта* K, *необходимо и достаточно, чтобы либо* 1) *функционал, порожденный последовательностью* $\{m_{i_1,\ldots,r}\}$, *был положительный относительно* K, *либо* 2) *для всякого полинома* $P(x) \in L^{2r}$ *выполнялось следующее сооотношение*:

$$\min_{x\in K} P(x) \leqslant m(P) \leqslant \max_{x\in K} P(x).$$

Доказательство теоремы основывается на теореме о продолжении линейного положительного функционала (4), затем показывается, что условие 1) и 2) эквивалентны.

Теорема 2. *Для того чтобы последовательность $\{m_{i_1,\dots,i_{2r}}\}_1^n$ допускала представление*

$$m_{i_1,\dots,i_{2r}} = \int\limits_{D_{in}} x_{i_1} \times \dots \times x_{i_{2r}} \nu(dx),$$

где $\nu(\cdot)$ — нормированная неотрицательная мера

$$D_m = \left\{x\colon \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} \leqslant c\right\}, \quad c = \sum_{i=1}^{n} m_{i,\dots,i},$$

необходимо и достаточно, чтобы она порождала положительный функционал.

При доказательстве теоремы 2 используется сначала лемма 1, а затем теорема 1.

Лемма 1. *Пусть $P(x) \in L^{2r}$, тогда существует $P_1(x) \in L_+^{2r}$ такой, что*

$$\max_{x\in D} P(x) = \max_{x\in D} P_1(x), \quad P(x) \leqslant P_1(x),$$

где

$$D = \left\{x\colon \sum_{i=1}^{n} x_i^{2r} \leqslant 1\right\}.$$

Из теоремы 1 и теоремы 2 можно получить следующие следствия.

Следствие 1. *Пусть последовательность $m_{i_1,\dots,i_{2r}}$ порождает положительный функционал, тогда однородная форма 2r-степени*

$$B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1,\dots,i_{2r}=1}^{n} m_{i_1,\dots,i_{2r}} x_{i_1} \times \dots \times x_{i_{2r}}$$

допускает следующее представление:

$$B(x_1, \dots, x_n) = \sum_{s=1}^{m} P_s \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^s x_i\right)^{2r},$$

где

$$P_s > 0, \quad \sum_{s=1}^{m} P_s = 1.$$

Следствие 2. *Пусть*

$$M = \{(m_{i_1,\dots,i_{2r}})_1^n\colon\ m(P) \geqslant 0,\ P(x) \geqslant 0\},$$

$$M' = \left\{(b_{i_1,\dots,i_{2r}})_1^n\colon \sum_{i_1,\dots,i_{2r}=1}^{n} b_{i_1,\dots,i_{2r}} x_{i_1} \times \dots \times x_{i_{2r}} \geqslant 0 \text{ для любого } x \in R^n\right\}.$$

Тогда $M \subset M'$.

Теорема 3. *Для того чтобы последовательность $\{m_{i_1,\dots,i_{2r}}\}_1^\infty$ была моментной 2r-порядка некоторой последовательности случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$, т. е.*

$$m_{i_1,\dots,i_{2r}} = M\xi_{i_1} \times \dots \times \xi_{i_{2r}},$$

необходимо и достаточно, чтобы при каждом n был положительный функционал, порожденный последовательностью $\{m_{i_1,\dots,i_{2r}}\}_1^n$.

При доказательстве используется тот факт, что, не ограничивая общности, можно считать ряд $\sum\limits_{i=1} m_{i,\dots,i}$ сходящимся, затем используется теорема 2.

Следствие. *Множество моментных последовательностей $2r$-порядка является выпуклым замкнутым конусом.*

Теорема 4. *Для того чтобы функция* $m(t_1, \dots, t_{2r}) \in L_2(K^{2r})$, *где* $K^n = \{(t_1, \dots, t_n): 0 \leqslant t_i \leqslant 1, i = 1, \dots, n\}$,

$$L_2(K^n) = \left\{f: \int\limits_{K^n} f^2(t_1, \dots, t_n)\, dt_1 \times \dots \times dt_n < \infty\right\},$$

была моментной $2r$-порядка некоторого случайного процесса, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла следующему условию:

$$\int\limits_{K^{2r}} m(t_1, \dots, t_{2r})\, a(t_1, \dots, t_{2r})\, dt_1 \times \dots \times dt_{2r} \geqslant 0$$

для всех $a(t_1, \dots, t_{2r})$ *таких, что* $a(t_1, \dots, t_{2r}) \in L_2(K^{2r})$ *и* $\int\limits_{K^{2r}} a(t_1, \dots, t_{2r}) x(t_1) \times \dots \times x(t_{2r})\, dt_1 \times \dots \times dt_{2r} \geqslant 0$, *где* $x(t) \in L_2(K^1)$.

При доказательстве теоремы 4 $m(t_1, \dots, t_{2r})$ разлагается в ряд по некоторому базису, затем с использованием теоремы 3 показывается, что коэффициенты разложения образуют моментную последовательность $2r$-порядка некоторых случайных величин $\xi_1, \dots, \xi_n, \dots$ Далее вводится процесс $\xi(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k \varphi_k(t)$, где $\{\varphi_k(t)\}$ — ортонормированный базис в $L_2(K^1)$; тогда $m(t_1, \dots, t_{2r})$ будет моментной функцией $2r$-порядка этого процесса, т. е.

$$m(t_1, \dots, t_{2r}) = M\xi(t_1) \times \dots \times \xi(t_{2r}).$$

Автор выражает глубокую благодарность А. В. Скороходу за постановку задачи и помощь в работе.

Киевский государственный университет
им. Т. Г. Шевченко

Поступило
20 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Н. Ширяев, Теория вероятности и ее применение, 5, 3 (1960). [2] В. П. Леонов, Некоторые применения старших семиинвариантов к теории стационарных процессов, «Наука», 1964. [3] В. Чакалов, Д. Скордев, Изв. Математ. инст. Бълг. АН, 9 (1966). [4] Н. И. Ахиезер, Классическая проблема моментов, М., 1961.