Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 513.83 *МАТЕМАТИКА*

НГУЕН НГОК ЗЬЕП (ДРВ)

ТЕОРЕМА КУПКИ — СМЕЙЛА ДЛЯ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ С ИНВАРИАНТНОЙ МЕРОЙ

(Представлено академиком Л. С. Понтрягиным 3 I 1972)

Начиная с 1963 г., появился ряд работ, посвященных «типичным» свойствам периодических траекторий того или иного класса динамических систем на замкнутых гладких многообразиях. Типичность означает, что динамические системы, периодические траектории которых имеют данные свойства, образуют множество второй категории в рассматриваемом классе динамических систем, снабженном топологией C^n, $n \geqslant 1$. Первые результаты здесь получены С. Смейлом ([1]) и И. Купкой ([2, 3]), поэтому о теоремах такого типа говорят как о теоремах типа Купки — Смейла для такого-то класса динамических систем. Такие теоремы имеются также в работах ([4–6]).

В настоящей работе доказывается теорема типа Купки — Смейла для гладких (класса C^n, $n \geqslant 1$) отображений замкнутого гладкого многообразия M в себя, сохраняющих заданную на нем гладкую меру μ. Если $\dim M < 3$, то мы исключим из рассмотрения диффеоморфизмы (к которым относятся результаты ([5, 6])). Совокупность всех отображений с указанными свойствами обозначим через $E^n(M, \mu)$ и снабдим ее C^n-топологией. Очевидно, что $E^n(M, \mu)$ — полное метрическое пространство. Условие $f \in E^n(M, \mu)$ эквивалентно тому, что при всех $y \in M$

$$\sum_{x \in f^{-1}(y)} \frac{1}{\det (df(x))} = 1.$$

Отсюда следует, что f — накрытие.

Пусть p — периодическая точка f периода j. Она называется трансверсальной (элементарной), если дифференциал $df^j: T_pM \to T_pM$ не имеет собственных значений, равных единице (равных единице по модулю). Как известно (см., например, ([1])), у такой точки имеются локальные устойчивое и неустойчивое многообразия $W^s_{\text{loc}}(p)$ и $W^u_{\text{loc}}(p)$. В нашем случае (f — накрытие) устойчивое и неустойчивое многообразия

$$W^s(p) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{-nj} W^s_{\text{loc}}(p), \quad W^u(p) = \bigcup_{n \geqslant 0} f^{nj} W^u_{\text{loc}}(p)$$

являются гладкими иммерсированными подмногообразиями M, второе из них связно.

Теорема. *Пусть $G \subset E^n(M, \mu)$ — множество тех отображений f, для которых*

1) *все периодические точки f элементарные*;

2) *если p и q — периодические точки f, то* а) *$W^u(p)$ и $W^s(q)$ трансверсальны*; б) *$W^u(p)$ и $W^u(q)$ также трансверсальны (при $p = q$ последнее означает, что иммерсированное подмногообразие $W^u(p)$ имеет трансверсальные самопересечения)*.

Тогда G является множеством второй категории в $E^n(M, \mu)$.

Вопрос о трансверсальности $W^u(p)$ и $W^u(q)$, конечно, имеет смысл только для необратимых f (не только сохраняющих меру, но и любых, как в ([4]), где, однако, этот вопрос не затронут).

Можно было бы рассмотреть свойства, зависящие от струй более высокого порядка. Однако неясно, представляют ли они интерес для топологических свойств траекторий рассматриваемого здесь класса систем (в отличие от ([5], [6])).

Общая схема доказательства близка к схеме, предложенной в ([7]) и ставшей общепринятой. Как обычно, существенную роль играет теорема трансверсальности Абрахама, однако пока еще неизвестно, является ли $E^n(M, \mu)$ банаховым многообразием, поэтому прямое применение ее невозможно.

Пусть $\tilde{T}_p$ — множество отображений из $E^n(M, \mu)$, периодические точки которых периода $\leqslant p$ трансверсальны, а $T_p \subset E^n(M, \mu)$ состоит из отображений, имеющих только элементарные точки периода $\leqslant p$. Чтобы доказать, что $\bigcap\limits_p T_p$ имеет вторую категорию в $E^n(M, \mu)$, надо доказать три

Утверждения. 1) *$\tilde{T}_1$ открыто и всюду плотно в $E^n(M, \mu)$;*

2) *$\tilde{T}_p \cap T_{p-1}$ открыто и всюду плотно в T_{p-1};*

3) *T_p всюду плотно в $\tilde{T}_p$.*

Открытость в первых двух утверждениях очевидна, а плотность легко выводится из следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $V_1, \ldots, V_N$ — гладкие векторные поля, которые сохраняют меру μ и значения которых при всех x порождают все касательное пространство T_xM, а S_i^t — порожденные ими потоки. Пусть $f \in E^n(M, \mu)$.*

Тогда существует такое $A > 0$, что при почти всех $a = (a_1, \ldots, a_N)$, $0 \leqslant a_i \leqslant A$, отображение

$$f_a = S_1^{a_1} \circ \ldots \circ S_N^{a_N} \circ f$$

имеет лишь трансверсальные периодические точки.

Если $m > 2$, то множество Q матриц из $SL(m, R)$ не имеющих собственных значений, по модулю равных единице, открыто и всюду плотно в $SL(m, R)$. Для доказательства третьего утверждения при $\dim M = m > 2$ осталось доказать лемму 2.

Лемма 2. *Пусть p_0 — произвольная точка M, U — окрестность p_0.*

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что если $A \in SL(m, R)$ и $\|A - I\| < \delta$, то существует такой диффеоморфизм Φ: $M \to M$, сохраняющий меру μ, что $\Phi(p_0) = p_0$, $\Phi(x) = x$ при $x \notin U$, расстояние в C^n-метрике $\rho_{C^n}(\Phi, \mathrm{id}_M) < \varepsilon$ и $d\Phi(p_0) = A$ (в подходящих локальных координатах).

При $\dim M = 1, 2$ вместо этого надо использовать то, что в данном случае из сохранения меры и наличия у каждой точки нескольких прообразов вытекает, что элементарность периодической точки периода j эквивалентна отсутствию у df^j соответственных значений ± 1.

Остальная часть доказательства теоремы так же, как и у других авторов, опирается на следующие леммы.

Лемма 3. *Пусть M — компактное многообразие, N и S — его подмногообразия.*

Тогда существует сколь угодно близкий к тождественному сохраняющий меру μ диффеоморфизм Φ: $M \to M$, такой, что ΦN трансверсально S.

(Для построения Φ используются векторные поля V_i из леммы 1.)

Лемма 4. *Существуют такие множества отображений $G_p \subset E^n(M, \mu)$ и положительная непрерывная функция E_j^p на G_p, $0 < j \leqslant p$, что*

1) *G_p открыто и всюду плотно в T_p;*

2) $G_{p+1} \subset G_p$ и $E_j^p \big| G_{p+1} = E_j^{p+1}$, $\quad 0 < j \leqslant p$;

3) *если $f \in G_p$, а m — седловая периодическая точка f периода $j \leqslant p$, то обозначая через $U_f(m)$ шар радиуса $E_j^p(f)$ с центром в m и полагая*

$$L_f^s(m) = \overline{U_f(m) \cap W^s_{\mathrm{loc}}(m)}, \quad L_f^u(m) = \overline{U_f(m) \cap W^u_{\mathrm{loc}}(m)},$$

имеем $f^{2j}(L_f^u(m)) \subset W^u_{\mathrm{loc}}(m)$ и связная компонента m в $f^{-2j}(L_f^s(m)) \subset \subset W^s_{\mathrm{loc}}(m)$;

4) *Если, сверх того, $f \in G_{p+1}$, то на $f^{rj}(L_f^u(m))$ и на $f^{-rj}(L_f^s(m))$ нет периодических точек периода $\leqslant p+1$, исключая саму точку m;*

5) *если m и n — периодические точки для $f \in G_p$ периодов $j \leqslant p$ и $k \leqslant p$ соответственно, то*

$$(L_f^s(m) \cup f^{2j}(L_f^u(m))) \cap (L_f^s(n) \cup f^{2k}(L_f^u(n))) = \phi,$$

а если $m = n$, то $f^{2j}(L_f^u(m)) \cap L_f^s(m) = m$.

Сначала эта лемма доказывается заменой в 4) f^{rj} и f^{-rj} на f^{2j} и f^{-2j} соответственно, а затем с помощью леммы 3 в сформулированном виде.

Лемма 5. *В G_p открыто и всюду плотно множество отображений f, для которых выполнено следующее условие: если m и n — периодические точки периодов $i \leqslant p$ и $j \leqslant p$, то*

1) *$f^{kj} | L_f^u(n)$ трансверсально $L_f^s(m)$ при $kj \leqslant p$;*

2) *$f^{kj} | L_f^u(n)$ трансверсально $f^{li} | L_f^u(m)$ при $kj \leqslant p$, $li \leqslant p$.*

В заключение автор выражает благодарность Д. В. Аносову, чьи советы очень помогли при написании данной работы.

Поступило
22 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] S. Smale, Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa, ser. III, 17, № 1—2, 97 (1963). [2] I. Kupka, Contributions to Differential Equations, 2, 457 (1963). [3] I. Kupka, Contributions to Differential Equation, 3, 411 (1964). [4] M. Shub, Am. J. Math., 91, № 1, 175 (1969). [5] R. C. Robinson, Am. J. Math., 92, № 3, 562 (1970). [6] R. C. Robinson, Am. J. Math., 92, № 4, 897 (1970). [7] M. M. Peixoto, J. Diff. Equations, 3, № 2, 214 (1966).