Доклады Академии наук СССР
1972. Том 205, № 2

УДК 511.84 **МАТЕМАТИКА**

Ю. В. НЕСТЕРЕНКО

ОЦЕНКИ ПОРЯДКОВ НУЛЕЙ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НЕКОТОРОГО КЛАССА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В ТЕОРИИ ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ЧИСЕЛ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 31 XII 1971)

Пусть функции $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ составляют решение системы дифференциальных уравнений

$$y_k' = \sum_{i=0}^{m} q_{ki} y_i, \quad k = 0, 1, \ldots, m, \tag{1}$$

$q_{ki} \in \mathbf{C}(z)$ и не связаны никаким однородным алгебраическим уравнением над полем $\mathbf{C}(z)$. Тогда для каждого однородного по $x_0 \ldots, x_m$ многочлена $P(z, x_0, \ldots, x_m) \in \mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$ определена ненулевая функция $g(z) = P(z, f_0(z), \ldots, f_n(z))$.

Предположим, что функции $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ аналитичны в некоторых фиксированных точках $\alpha_i \in \mathbf{C}$, $i = 1, \ldots, d$, тогда функция $g(z)$ также будет аналитична в них. Обозначим символом $O(P)$ сумму порядков нулей в этих точках функции $g(z) = P(z, f_0(z), \ldots, f_m(z))$.

Пусть n — степень многочлена P по z и h — степень по совокупности переменных $x_0, \ldots, x_m$. В статье речь будет идти об оценках сверху для $O(P)$ как функции от n, h, d и некоторых приложениях этих оценок в теории трансцендентных чисел.

Подобные оценки для функций $f_i = \exp(\beta_i z)$ при $d = 1$ можно получить из результатов работы [4] (см. также [5], гл. I). Для тех же функций с растущим d оценки $O(P)$ получаются в [1], гл. III, § 4, л. III. Однако при этом накладываются некоторые ограничения на арифметическую природу чисел β_i, а также на изменение n и h.

Существенную часть метода Зигеля — Шидловского в теории трансцендентных чисел (см. [2]) составляет оценка $O(L)$ для линейной формы $L = a_0(z) \cdot x_0 + \ldots + a_m(z) \cdot x_m$ и произвольных функций $f_0(z), \ldots, f_m(z)$, удовлетворяющих системе (1) (см. [7], гл. VII). Аналогичный результат для многочленов (теорема 3) позволит нам получить оценку меры алгебраической независимости значений E-функций (см. [2]) с растущими степенью и высотой (теорема 4).

Мы несколько расширим постановку задачи. Пусть I — однородный по переменным $x_0, \ldots, x_m$ идеал кольца $\mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$. Обозначим $O(I)$ минимум $O(Q)$, взятый по всем многочленам Q, принадлежащим I, однородным по переменным $x_0, \ldots, x_m$. В случае, когда $I = (P)$ — главный идеал, будем иметь $O(I) = O(P)$. Предположим, что в I существует базис, состоящий из однородных по $\bar{x}$ многочленов, степени которых по z не превосходят n, а по совокупности переменных $\bar{x}$ — h. Тогда имеет место

Теорема 1. *Пусть* $\dim I = r + 1$, $r \geqslant 0$; *тогда*

$$O(I) \leqslant h^{(m+1)^{r+1}} [c_1(n+1) + c_2 d \min(n+1, h)], \tag{2}$$

где c_1, c_2 *— эффективные константы, зависящие от функций* $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ *и системы уравнений* (1).

С л е д с т в и е 1. *Если $P(z, x_0, \ldots, x_m)$ — однородный по $\bar{x}$ многочлен степени h, а степень его по z не превосходит n, то*

$$O(P) \leqslant h^{(m+1)^{m+1}} [c_1(n+1) + c_2 d \min(n+1, h)]. \qquad (3)$$

С л е д с т в и е 2. *Пусть функции $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ алгебраически независимы над $\mathbf{C}(z)$, аналитичны в точках $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ и составляют решение неоднородной системы уравнений*

$$y_k' = q_{k0} + \sum_{i=1}^{m} q_{ki} y_i, \quad k = 1, \ldots, m, \quad q_{ki} \in \mathbf{C}(z). \qquad (4)$$

Тогда для каждого $P(z, x_1, \ldots, x_m) \in \mathbf{C}[z, x_1, \ldots, x_m]$ такого, что $\deg_z P \leqslant n$, $\deg_{\bar{x}} P \leqslant h$, имеет место неравенство (3).

Если положить $f_0(z) = 1$, то следствие 2 сводится к следствию 1.

Доказательство теоремы 1 проводится индукцией по размерности идеала I в пределах от $r = 0$ до $r = m$. При этом существенна приводимая ниже теорема об оценке $O(I)$ для идеалов I специального вида.

Обозначим $t(z)$ общий знаменатель коэффициентов $q_{ki}(z)$ в системе (1) и $D = \frac{\partial}{\partial z} + \sum_{k=0}^{m} \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot \left(\sum_{i=0}^{m} q_{ki} \cdot x_i \right)$ дифференциальный оператор, построенный исходя из этой системы. Тогда оператор $t(z) \cdot D$ действует в кольце $\mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$.

Т е о р е м а 2. *Существует константа C, зависящая только от функций $f_0(z), \ldots, f_m(z)$ и системы* (1) *такая, что для любого радикального идеала $I \subset \mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$, однородного по $\bar{x}$ и инвариантного относительно оператора $t(z) \cdot D$, т. е. $t(z) \cdot D(I) \subseteq I$, имеет место неравенство $O(I) \leqslant C$.*

Для доказательства этой теоремы используется теория Галуа дифференциальных расширений Пикара — Вессио, созданная Колчиным (см. ([6])). Если G — группа Галуа системы (1), то устанавливается некоторая связь между однородными радикальными идеалами кольца $\mathbf{C}(z)[x_0, \ldots, x_m]$, инвариантными относительно оператора D и проективными многообразиями в $\mathbf{P}^m$, инвариантными относительно группы G. Эта связь позволяет доказать, что в условиях теоремы в множестве однородных радикальных идеалов кольца $\mathbf{C}(z)[x_0, \ldots, x_m]$, инвариантных относительно оператора D, существует единственный минимальный. Отсюда немедленно получается требуемая оценка.

Вернемся к доказательству теоремы 1. Общий шаг индукции происходит следующим образом. Предположив, что неравенство (2) не выполняется, т. е. сумма порядков нулей $O(I)$ достаточно велика, удается, используя некоторые факты из теории исключения, установленные автором, доказать существование однородного по $\bar{x}$ идеала $J \subset \mathbf{C}[z, x_0, \ldots, x_m]$, примарное разложение которого имеет вид

$$J = \mathfrak{P} \cap J_1 \cap \ldots \cap J_t,$$

где $\mathfrak{P}$ — один из ассоциированных с I простых идеалов размерности $r+1$, а $J_1, \ldots, J_t$ — вложенные компоненты J; кроме этого, $J = (P_1, \ldots, P_T)$, $\deg_z P_i \leqslant N$, $\deg_{\bar{x}} P_i \leqslant H$, а

$$O(\mathfrak{P}) \geqslant c_3 H^{(m+1)^r} (N + H) + c_4 d \min(N + H, H^{(m+1)^r}). \qquad (5)$$

Поскольку сумма порядков нулей $O(\mathfrak{P})$ достаточно велика, то из теоремы 2 следует, что $t(z) \cdot D(\mathfrak{P}) \not\subset \mathfrak{P}$. Отсюда легко показать, что $t(z) \cdot D(J) \not\subset \mathfrak{P}$, т. е. существует номер l такой, что $P_0 = t(z) \cdot D(P_l) \notin \mathfrak{P}$. Обозначим $I_1 = (P_0, J) = (P_0, P_1, \ldots, P_T)$. Так как $\mathfrak{P}$ — единственная изолированная компонента J, а $P_0 \notin \mathfrak{P}$, то легко показать, что $\dim I_1 \leqslant r$. Из способа построения P_0 можно получить оценки на степени по z и $\bar{x}$ многочлена P_0. Поскольку для P_i, $i=1,\ldots,T$, мы подобные оценки знаем, то индуктивное предположение позволит нам оценить $O(I_1)$ через N, H сверху. С другой стороны, из способа построения P_0 следует, что $O(P_0)\geqslant O(\mathfrak{P})-d$. А так как $O(P_i)\geqslant O(\mathfrak{P})$, $i=1,\ldots,T$, и $O(I_1)=\min\limits_{i=0,1,\ldots,T} O(P_i)$, то неравенство (5) позволит получить нижнюю оценку для $O(I_1)$, выраженную через N, H. Константы c_1, c_2 подобраны так, что оценки снизу и сверху для $O(I_1)$ противоречивы. Это доказывает неверность допущения относительно $O(I)$, а вместе с тем и общий шаг индукции.

Оценка для $O(P)$, даваемая теоремой 1, далека от точной. Принцип Дирихле, с помощью которого можно получить нижнюю границу для $\max O(P)$ по всем однородным по $\bar{x}$ P с условиями $\deg_z P\leqslant n$, $\deg_{\bar{x}} P\leqslant h$, показывает, что точная оценка должна иметь главный член порядка c_5nh^m. Однако подобная грубая оценка, верная при n, h, меняющихся независимо, позволяет получить оценку, точную по n, h, но справедливую только при $n>c_6h^\gamma$, где c_6, γ — константы, не зависящие от n, h. Для числовых приложений достаточен случай, когда d — количество точек, в которых оцениваются порядки нулей, равно 2. С этим допущением мы и сформулируем теорему 3. Пусть функции $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ удовлетворяют условиям следствия 2 при $d=2$,

$$P(z,x_1,\ldots,x_m)=\sum_{k_1+\ldots+k_m\leqslant h} A_{\bar{k}}(z)\cdot x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m},\quad A_{\bar{k}}(z)\in\mathbf{C}[z],\quad \deg A_{\bar{k}}(z)\leqslant n.$$

Если $t(z)$ — общий знаменатель $q_{ki}(z)$, а

$$D=\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(q_{k0}+\sum_{i=1}^{m} q_{ki}x_i\right),$$

то оператор $t(z)\cdot D$ действует в кольце $\mathbf{C}[z,x_1,\ldots,x_m]$, не повышая степени по $\bar{x}$, и, значит, многочлены $P_l(z,x_1,\ldots,x_m)=(t(z)\cdot D)^{l-1}P$ можно рассматривать как линейные формы от $M=\binom{h+m}{m}$ произведений степеней $x_1^{k_1}\ldots x_m^{k_m}$, $k_1+\ldots+k_m\leqslant h$. Предположим, что максимальное число линейно не зависимых среди $P_1,\ldots,P_M$ равно s. Тогда имеет место

Теорема 3. *Существует эффективно вычисляемая константа c_7 такая, что при всех n, h*

$$O(P)\leqslant sn+c_7h^\gamma,$$

где $\gamma=(m+1)^{m+1}+m+1$.

Легко видеть, что при $n>c_8h^{m+1}$ оценка, даваемая теоремой 3, лучше, чем оценка теоремы 1.

Доказательство теоремы 3 проходит аналогично методу, предложенному А. Б. Шидловским для оценки $O(L)$ линейных форм L (см. ([2], [7])). Теорема 1 позволяет оценить неэффективную в этом методе константу n_0 (см. ([2]), л. 6) и тем самым провести доказательство для многочленов.

Аналогично тому, как лемма А. Б. Шидловского позволяет оценить меру линейной независимости значений E-функций в алгебраических точках (см. ([3])), теорема 3 дает возможность доказать теорему 4. Мы ограничимся в ней E-функциями, в определении которых оценки $n^{\varepsilon n}$ заменены на c_9^n (см. ([2])). Это не сильно уменьшает общность, поскольку все известные в настоящее время E-функции удовлетворяют именно этому условию.

Теорема 4. *Пусть* $P(x_1,\ldots,x_m)\in\mathbf{Z}[x_1,\ldots,x_m]$, $\deg_{\bar{x}} P\leqslant d$, *а максимум модулей коэффициентов P не превосходит H; α — алгебраическое число такое, что* $\alpha\cdot t(\alpha)\neq 0$.

Тогда существуют эффективные константы C и γ_1, зависящие только от системы (4), *функций* $f_1(z), \ldots, f_m(z)$ *и числа* α, *такие, что при* $\ln\ln H > Cd^{2m}\ln(d+1)$ *будет выполнено неравенство*

$$|P(f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha))| > H^{-\gamma_1 d^m}.$$

Все общие оценки для меры алгебраической независимости $f_1(\alpha), \ldots \ldots, f_m(\alpha)$ (см., например, ([7], [3])) получаются по существу как оценки меры линейной независимости произведений степеней $f_1(\alpha), \ldots, f_m(\alpha)$ и из-за уже упомянутой неэффективности n_0 граница для H в зависимости от d, начиная с которой они действуют, ранее не была известна.

Подробные доказательства всех теорем будут опубликованы.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
28 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. О. Гельфонд, Трансцендентные и алгебраические числа, М., 1952. [2] А. Б. Шидловский, Изв. АН СССР, сер. матем., **23**, № 1, 35 (1959). [3] А. Б. Шидловский, Матем. заметки, **2**, № 1, 33 (1967). [4] K. Mahler, J. reine u. angew. Math., **166**, 118 (1931). [5] C. L. Siegel, Transcendental Numbers, Princeton, 1949. [6] E. R. Kolchin, Ann. Math., **49**, № 1, 1 (1948). [7] S. Lang, Introduction to Transcendental Numbers, 1966.