Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 518 : 517.948 МАТЕМАТИКА

Г. Д. МАЙСТРОВСКИЙ

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДА НЬЮТОНА

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 16 XII 1971)

Пусть B, m, ε_0 — положительные константы, $c = B(2m)^{-1}$, $r = \varepsilon_0 + c\varepsilon_0^2$, $x_0 \in R^n$, $S(x_0, r) = \{x \mid \|x - x_0\| \leqslant r\}$; $K = K^{n,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}$ — класс всех дифференцируемых отображений F: $S(x_0, r) \to R^n$, удовлетворяющих условиям

$$\|F'(x) - F'(\bar{x})\| \leqslant B\|x - \bar{x}\|, \quad \|(F'(x))^{-1}\| \leqslant m^{-1}, \quad x, \bar{x} \in S(x_0, r),$$

и обладающих корнем * в шаре $S(x_0, \varepsilon_0)$; $K^{n,B,m}(z_1, \ldots, z_N)$ — подмножество элементов K таких, что

$$F(\xi_i) = \eta_i, \quad F'(\xi_i) = \zeta_i$$

($i = 1, 2, \ldots, N$, z_i — набор (ξ_i, η_i, ζ_i), где $\xi_i, \eta_i \in R^n$, ζ_i — линейный оператор в R^n). Обозначим через $\rho^{n,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}(z_1, \ldots, z_N)$ радиус минимального шара, содержащего корни всех операторов класса $K(z_1, \ldots, z_N)$. Условившись считать $\rho(z_1, \ldots, z_N) = 0$ в случае $K(z_1, \ldots, z_N) = \phi$, положим **

$$\varepsilon^{n,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}(N) = \inf_{\xi_1} \sup_{\eta_1\zeta_1} \ldots \inf_{\xi_N} \sup_{\eta_N\zeta_N} \rho(z_1, \ldots, z_N), \qquad \varepsilon^{n,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}(0) = \varepsilon_0.$$

Будем предполагать, что ε_0 достаточно мало по сравнению с c^{-1}. Общеизвестна оценка

$$\varepsilon(N) \leqslant c^{-1}(c\varepsilon_0)^{2N},$$

реализуемая методом Ньютона, развитым для операторных уравнений Л. В. Канторовичем [1].

Теорема. *Имеет место неравенство*

$$\varepsilon(N) \geqslant c_1^{-1}(c_1\varepsilon_0)^{2N},$$

где $c_1 \geqslant c(1 - 50\sqrt{c\varepsilon_0})$.

Таким образом, не существует способа приближенного нахождения корня, существенно более точного, нежели метод Ньютона.

Легко видеть, что общий случай сводится к случаю $n = 1$. Действительно, поставим при произвольном фиксированном n каждому $f \in K^{1,B,m}_{t_0,\varepsilon_0}$ в соответствие $F \in K^{n,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}$, $x_0 = (t_0, 0, \ldots, 0)$, по правилу

$$F(t^{(1)}, t^{(2)}, \ldots, t^{(n)}) = (f(t^{(1)}), mt^{(2)}, \ldots, mt^{(n)}).$$

Указанное вложение позволяет по любому способу, локализующему на основе информации о значениях $F(x)$ и $F'(x)$ в N точках корень с точностью до ε на классе $K^{n,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}$, эффективно получить способ решения той же задачи на классе $K^{1,B,m}_{t_0,\varepsilon_0}$.

Итак, пусть $n = 1$. Рассмотрим вспомогательную задачу с «закрепленными концами». Пусть $A_1 = (\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, $A_2 = (\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ — векторы в R^3,

* Корнем отображения F здесь именуется решение уравнения $Fx = 0$.

** Менее формально, $\varepsilon(N)$ — инфимум чисел ε таких, что для всякого оператора $F \in K$ можно указать корень с точностью до ε, произведя вычисления значений $F(x)$ и $F'(x)$ в N точках.

$L = L^B_{A_1A_2}$ — класс тех дифференцируемых на оси функций, удовлетворяющих условию

$$|f'(x) - f'(\bar{x})| \leqslant B|x - \bar{x}|, \quad -\infty < x, \quad \bar{x} < \infty,$$

и таких, что

$$f(\alpha_i) = \beta_i, \quad f'(\alpha_i) = \gamma_i, \ i = 1, 2.$$

Определим для класса L объекты $L^B_{A_1A_2}(z_1, \ldots, z_k)$, $\rho^B_{A_1A_2}(z_1, \ldots, z_k)$ и $\varepsilon^B_{A_1A_2}(k)$, $k = 0, 1, 2, \ldots, N$, аналогично тому, как это было сделано для класса K. Можно показать, что справедливость теоремы обеспечивается существованием множества $\mathfrak{M} \subset R^3 \times R^3$, обладающего следующими свойствами: 1) для любой пары $(A_1, A_2) \in \mathfrak{M}$ и любого числа ξ найдутся числа η и ζ и пара $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) \in \mathfrak{M}$ такие, что

$$L^B_{A_1,A_2}(z) \supset L^B_{\tilde{A}_1,\tilde{A}_2}, \quad z = (\xi, \eta, \zeta), \tag{1}$$

и

$$\varepsilon^B_{\tilde{A}_1,\tilde{A}_2}(0) \geqslant c_1 (\varepsilon^B_{A_1,A_2}(0))^2, \quad c_1 \geqslant c(1 - 50\sqrt{c\varepsilon_0}); \tag{2}$$

2) существует пара $(A_1{}^0, A_2{}^0) \in \mathfrak{M}$, удовлетворяющая условию

$$K^{1,B,m}_{x_0,\varepsilon_0} \supset L^B_{A_1^0, A_2^0} \text{ и } \varepsilon^{1,B,m}_{x_0,\varepsilon_0}(0) = \varepsilon^B_{A_1^0, A_2^0}(0). \tag{3}$$

Зафиксируем $\lambda = 1 - 16\sqrt{c\varepsilon_0}$ и положим $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_{-\lambda} \cup \mathfrak{N}_\lambda$, где $\mathfrak{N}_\mu$ — множество пар (A_1, A_2), удовлетворяющих условиям

$$\varphi_\mu(x) \equiv \mu \frac{B}{2}(x - \alpha_1)^2 + \gamma_1(x - \alpha_1) + \beta_1 \in L^B_{A_1,A_2}, \tag{4}$$

$$\beta_1 < 0, \ \beta_2 > 0; \quad 0 < \frac{8}{1 - |\mu|} \frac{|\beta_i|}{\gamma_i} \leqslant \alpha_2 - \alpha_1 \leqslant \frac{\gamma_i}{B}, \quad \frac{m}{|\mu|} \geqslant \gamma_i + 3B \frac{|\beta_i|}{\gamma_i} \tag{5}$$

$(i = {}^1/_2(3 + \operatorname{sign}\mu))$. Положим для $(A_1, A_2) \in \mathfrak{M}$

$$f^+(x) = \sup_{f \in L^B_{A_1,A_2}} (x), \quad f^-(x) = \inf_{f \in L^B_{A_1,A_2}} f(x), \quad f_1 = \frac{1+\lambda}{2} f^+ + \frac{1-\lambda}{2} f^-,$$

$$f_2 = \frac{1-\lambda}{2} f^+ + \frac{1+\lambda}{2} f^-.$$

Можно показать, что $f^+, f^- \in L^B_{A_1A_2}$. Оценив корни r^+ и r^- функций $f^+(x)$ и $f^-(x)$ соответственно и учитывая, что $\varepsilon^B_{A_1A_2}(0) = r^- - r^+$, можно вывести неравенство

$$\frac{B}{2} \frac{\beta_i^2}{\gamma_i^3} \leqslant \varepsilon^B_{A_1,A_2}(0) \leqslant \frac{B}{2} \frac{\beta_i^2}{\gamma_i^3} \left(1 + \frac{3}{2} B^2 \frac{\beta_i^2}{\gamma_i^4}\right), \tag{6}$$

где $i(A_1, A_2) = 1$, если $(A_1, A_2) \in \mathfrak{N}_{-\lambda}$, и $i(A_1, A_2) = 2$, если $(A_1, A_2) \in \mathfrak{N}_\lambda$.

Положим теперь

$$z(\xi) = (\xi, f_j(\xi), f_j'(\xi)); \quad \tilde{\alpha}_j = \alpha_j, \ \tilde{\alpha}_{3-j} = \alpha_i - \beta_i\gamma_i^{-1},$$

$$\tilde{A}_1 = z(\tilde{\alpha}_1), \quad \tilde{A}_2 = z(\tilde{\alpha}_2),$$

где $i = i(A_1, A_2)$; $j = 1$, если $\xi > \alpha_i - \beta_i\gamma_i^{-1}$, и $j = 2$, если $\xi \leqslant \alpha_i - \beta_i\gamma_i^{-1}$. Пара $(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2) \in \mathfrak{M}$, и выполняется включение (1). Кроме того, из (5), (6) можно вывести неравенство (2) с $c_1 = B(2m)^{-1}\lambda^3$.

Положим теперь $\gamma_1{}^0 = m(1 + 4\sqrt{c\varepsilon_0})$ и найдем $\alpha_1{}^0$ и $\beta_1{}^0$ из системы уравнений $x_0 - \varepsilon_0 = r^-$, $x_0 + \varepsilon_0 = r^+$. Положим далее, $\alpha_2{}^0 = \alpha_1{}^0 + B^{-1}\gamma_1{}^0$,

$\beta_2{}^0 = \varphi_\lambda(\alpha_2{}^0)$, $\gamma_2{}^0 = \varphi_\lambda'(\alpha_2{}^0)$. Так определенная пара $(A_1{}^0, A_2{}^0)$ удовлетворяет условию (3).

В заключение отметим, что постановка рассмотренной задачи возникла на основе работ ([2–6]), в которых вопрос об оптимальном поиске изучался в других ситуациях.

Автор выражает благодарность Ю. И. Любичу за обсуждение полученного результата.

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
14 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Л. В. Канторович, Тр. Матем. инст. АН СССР, в. 28 (1949). [2] J. Kiefer, Proc. Am. Math. Soc., 4 (1953). [3] S. M. Johnson, RAND Corp. Report P-856 (1956). [4] А. Ю. Левин, ДАН, 160, № 6 (1965). [5] А. И. Кузовкин, В. М. Тихомиров, Экономика и матем. методы, 3, в. 1 (1967). [6] Ф. Л. Черноусько, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., 8, № 4 (1968).