

Б. А. РУБШТЕЙН

ОБ УБЫВАЮЩИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ ИЗМЕРИМЫХ РАЗБИЕНИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 I 1972)

Пусть $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ — убывающая последовательность измеримых разбиений пространств Лебега M с непрерывной мерой, причем $\xi_0 = \varepsilon$ — разбиение пространства M на отдельные точки ⁽¹⁾. Две такие последовательности $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ и $\xi' = \{\xi'_n\}_{n=0}^\infty$, заданные на пространствах M и M' соответственно, называются финитно изоморфными ⁽²⁾, если для каждого n существует такой изоморфизм $\text{mod } 0$ $S_n: M \rightarrow M'$, что $S_n \xi_k = \xi'_k$ для всех $k \leq n$. Если существует изоморфизм $\text{mod } 0$ $S: M \rightarrow M'$, для которого $S \xi_n = \xi'_n$ при всех n , то последовательности ξ и ξ' называются изоморфными. Изоморфные последовательности, очевидно, финитно изоморфны, но обратное, вообще говоря, неверно.

Убывающая последовательность измеримых разбиений ξ называется эргодической, если $\bigcap_{n=0}^\infty \xi_n = \nu$, где ν — тривиальное разбиение пространства M . Измеримое разбиение пространства M называется дискретным, если все $\text{mod } 0$ точки из M имеют положительную условную меру в элементах этого разбиения.

В этой работе рассматриваются эргодические последовательности дискретных разбиений. Для них вводится понятие расширения, аналогичное понятию расширения динамической системы ⁽³⁾, и изучаются его свойства.

1. Расширение последовательности дискретных разбиений. Пусть X и Y — два пространства Лебега, $X \times Y$ — их прямое произведение, а $h: X \times Y \rightarrow X$ — проекция. Убывающую последовательность $\tilde{\xi} = \{\tilde{\xi}_n\}_{n=0}^\infty$ измеримых разбиений пространства $X \times Y$ назовем расширением (или Y -расширением) убывающей последовательности $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ измеримых разбиений пространства X , если для каждого n и всех $\text{mod } 0$ элементов $\tilde{C} \in \tilde{\xi}_n$ множество $h\tilde{C}$ есть $\text{mod } 0$ элемент разбиения ξ_n , а сужение гомоморфизма h на $\tilde{C}$ является изоморфизмом $\text{mod } 0$ между $\tilde{C}$ и $h\tilde{C}$.

Теорема 1. Пусть $\tilde{\xi}$ — Y -расширение убывающей последовательности дискретных разбиений ξ . Если последовательность $\tilde{\xi}$ эргодическая, то ξ также эргодическая, а пространство Y изоморфно либо k -точию с равномерной мерой, либо отрезку $[0, 1]$ с обычной мерой Лебега.

Для последовательности $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ измеримых разбиений пространств X обозначим через $\theta(\xi)$ разбиение (вообще говоря, неизмеримое), элемент которого, содержащий произвольную точку x , имеет вид $C(x) = \bigcup_{n=0}^\infty C_n(x)$, где $C_n(x)$ — элемент разбиения $\xi_n \in \xi$, содержащий x . Если все разбиения ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, из последовательности ξ дискретны, то существует счетная группа G измеримых (не обязательно сохраняющих меру) преобразований пространства X , разбиение на траектории которой совпадает с $\theta(\xi)$. Динамическая система (X, G) при этом явля-

ется эргодической в том и только в том случае, когда последовательность ξ эргодическая.

Пусть G — некоторая счетная группа измеримых преобразований пространства X , Γ — группа всех автоморфизмов пространства Y , снабженная слабой топологией, а $f: X \times G \rightarrow \Gamma$ — коцикл, т. е. измеримое отображение, удовлетворяющее условию: $f(x, g_1 g_2) = f(g_2 x, g_1) f(x, g_2)$ для любых $g_1, g_2 \in G$ и почти всех $x \in X$. Коциклу f соответствует Y -расширение $(X \times Y, G)$, динамической системы (X, G) , в котором группа G действует по формуле $(x, y) \rightarrow (gx, f(x, g)y)$ (см. (3)).

Теорема 2. Пусть ξ — убывающая последовательность дискретных разбиений пространства X и G — счетная группа измеримых преобразований X , разбиение на траектории которой совпадает с $\theta(\xi)$.

Тогда для каждого коцикла $f: X \times G \rightarrow \Gamma$ существует единственное mod 0 Y -расширение $\tilde{\xi}(f)$ последовательности ξ такое, что разбиение $\theta(\tilde{\xi}(f))$ совпадает с разбиением на траектории динамической системы $(X \times Y, G)_f$.

Обратно, для каждого Y -расширения $\tilde{\xi}$ последовательности ξ и любой счетной группы G , разбиение на траектории которой совпадает с $\theta(\xi)$, существует единственный mod 0 коцикл $f: X \times G \rightarrow \Gamma$ такой, что $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(f)$.

Пусть $\Gamma(X)$ — группа всех измеримых отображений из X в Γ (умножение в $\Gamma(X)$ поточечное). Два коцикла $f_1, f_2: X \times G \rightarrow \Gamma$ называются когомологичными, если существует $\varphi \in \Gamma(X)$ такое, что $f_2(x, g) = \varphi(gx) f_1(x, g) \varphi^{-1}(x)$ для всех $g \in G$ и почти всех $x \in X$. Если коциклы f_1 и f_2 когомологичны, то последовательности $\tilde{\xi}(f_1)$ и $\tilde{\xi}(f_2)$ изоморфны mod 0, обратное, вообще говоря, неверно (см. п. 4).

2. Описание классов финитно изоморфных последовательностей.

Лемма. Для каждой убывающей последовательности $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^\infty$ дискретных разбиений пространства M существует по крайней мере одна возрастающая последовательность $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ измеримых разбиений пространства M , удовлетворяющих mod 0 условиям:

- 1) $\delta_n \vee \xi_n = \varepsilon$;
- 2) для любых элементов d и d' разбиения δ_n и $l \leq n$ множество $H_{\xi_l} d$ и $H_{\xi_l} d'$ в пространстве M / ξ_l либо не пересекаются, либо совпадают ($H_{\xi_l} =$ проекция M на фактор-пространство M / ξ_l по разбиению ξ_l);
- 3) если точки x и x' лежат в одном элементе разбиения δ_n , то для любого $l \leq n$ условные меры x и x' в содержащих их элементах $C_l(x)$ и $C_l(x')$ разбиения ξ_l совпадают, а конечные последовательности разбиений, индуцированные последовательностью ξ , в $C_l(x)$ и $C_l(x')$, изоморфны;
- 4) если для некоторого измеримого разбиения δ_n' выполнены условия 1), 2), 3) и $\delta_n' \leq \delta_n$, то $\delta_n' = \delta_n$.

Каждой возрастающей последовательности $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ поставим в соответствие измеримое разбиение $\delta = \bigvee_{n=1}^\infty \delta_n$. Для убывающей последовательности дискретных разбиений ξ обозначим через $D(\xi)$ множество всех разбиений вида $\delta = \bigvee_{n=1}^\infty \delta_n$, где $\{\delta_n\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям леммы.

Назовем убывающую последовательность дискретных разбиений ξ минимальной, если $D(\xi)$ содержит разбиение ε^* . Минимальной является, например, последовательность $\{T^{-n}\varepsilon\}_{n=0}^\infty$, где T — эндоморфизм Бернулли с конечным или счетным числом состояний.

Теорема 3. Финитно изоморфные минимальные последовательности разбиений изоморфны.

* Определение минимальной последовательности взято из работы (4).

Теорема 4. Пусть F — класс всех финитно изоморфных последовательностей дискретных разбиений, содержащий хотя бы одну эргодическую последовательность.

Тогда существует единственная с точностью до изоморфизма эргодическая минимальная последовательность ξ_F такая, что любая последовательность из F изоморфна некоторому расширению последовательности ξ_F .

3. Вполне неоднородные последовательности разбиений. Для убывающей последовательности $\xi = \{\xi_n\}_{n=0}^{\infty}$ дискретных разбиений пространства M обозначим через $B(\xi)$ группу всех автоморфизмов пространства M , относительно которых разбиения ξ_n , $n = 1, 2, \dots$, вполне инвариантны. Если группа $B(\xi)$ состоит только из одного тождественного автоморфизма, то последовательность ξ называется абсолютно неоднородной ⁽²⁾. Пусть $B_n(\xi)$ — группа всех автоморфизмов из $B(\xi)$, оставляющих неподвижным разбиение ξ_n . Назовем убывающую последовательность дискретных разбиений вполне неоднородной, если при каждом n группа $B_n(\xi)$ состоит из одного тождественного автоморфизма. Последовательность ξ является вполне неоднородной в том и только в том случае, когда для нее существует единственная mod 0 последовательность разбиений $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющая условиям леммы. Поэтому для вполне неоднородной последовательности ξ множество $D(\xi)$ состоит только из одного разбиения и каждый автоморфизм из $B(\xi)$ оставляет это разбиение неподвижным.

Укажем некоторые свойства вполне неоднородных последовательностей:

1) если последовательность ξ вполне неоднородна, и последовательность ξ' финитно изоморфна ξ , то ξ' также вполне неоднородна;

2) любая абсолютно неоднородная последовательность вполне неоднородна; обратное, вообще говоря, неверно;

3) минимальная вполне неоднородная последовательность абсолютно неоднородна;

4) всякое расширение вполне неоднородной последовательности является вполне неоднородной последовательностью.

Пусть теперь ξ — абсолютно неоднородная минимальная последовательность разбиений пространства X и $\tilde{\xi}$ — некоторое Y -расширение последовательности ξ . Тогда $\tilde{\xi}$ вполне неоднородна, $D(\tilde{\xi})$ состоит из одного разбиения $\delta = \epsilon_X \times \nu_Y$. В силу теоремы 2 $\tilde{\xi} = \tilde{\xi}(f)$, где $f: X \times G \rightarrow \Gamma$ — коцикл, Γ — группа автоморфизмов пространства Y , а G — некоторая счетная группа измеримых преобразований пространства X , разбиение на траектории которой совпадает с $\theta(\xi)$.

Теорема 5. Пусть $\tilde{\xi}$ — абсолютно неоднородная минимальная последовательность разбиений пространства X . Два Y -расширения $\tilde{\xi}(f)$ и $\tilde{\xi}(f')$ последовательности $\tilde{\xi}$ изоморфны тогда и только тогда, когда коциклы f и f' когомологичны.

Каждая эргодическая вполне неоднородная последовательность разбиений изоморфна расширению некоторой абсолютно неоднородной минимальной последовательности. Поэтому теорема 5 вместе с теоремами 3 и 4 дает описание всех эргодических вполне неоднородных последовательностей.

4. Примеры. Пусть $T: X \rightarrow X$ — эндоморфизм Бернулли с двумя состояниями, вероятности которых p и $q = 1 - p$. Последовательность разбиений $\xi = \{T^{-n}\epsilon_X\}_{n=0}^{\infty}$ является эргодической и минимальной. Пусть $Z_3 = \{1, 2, 3\}$ — пространство, состоящее из трех точек меры $1/3$, S_3 — группа его автоморфизмов, а e — единица группы S_3 . Положим $a_1(x) = e$ и $a_2(x) = (1, 2)$, если $x \in A_0$, и $a_1(x) = a_2(x) = (1, 2, 3)$, если $x \in A_1$, где A_0 и A_1 — элементы бернуллиевской образующей эндоморфизма T ; $a_1, a_2 \in S_3(X)$. Рассмотрим косые произведения $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ над T со слоями a_1 и a_2 соответственно (см. ⁽⁵⁾). Последовательности $\xi_1 = \{\tilde{T}_1^{-n}\epsilon\}_{n=0}^{\infty}$ и

$\tilde{\xi}_2 = \{\tilde{T}_2^{-n}\varepsilon\}_{n=0}^{\infty}$ разбиений пространства $X \times Z_3$, порожденные эндоморфизмами $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$, эргодичны и являются Z_3 -расширениями последовательности ξ . Для любой динамической системы (X, G) , разбиение на траектории которой совпадает с $\theta(\xi)$, коциклы $f_1, f_2: X \times G \rightarrow S_3$, соответствующие расширениям $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ последовательности ξ , не кохомологичны.

Рассмотрим два случая.

1°. $p = q = 1/2$. Тогда ξ является стандартной диадической последовательностью ⁽²⁾; эндоморфизмы $\tilde{T}_1$ и $\tilde{T}_2$ изоморфны T , а последовательности $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ изоморфны ξ . Таким образом, два Y -расширения последовательности ξ при $p = q = 1/2$ могут, вообще говоря, быть изоморфными, даже если соответствующие им коциклы некохомологичны.

2°. $p \neq q$. Тогда ξ — абсолютно неоднородная минимальная последовательность, а последовательности $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ вполне неоднородны, финитно изоморфны, но не изоморфны ξ . Из теоремы 5 следует, что $\tilde{\xi}_1$ и $\tilde{\xi}_2$ не изоморфны, так как соответствующие им коциклы f_1 и f_2 не кохомологичны. Можно показать, что последовательность $\tilde{\xi}_2$ абсолютно неоднородна, хотя в отличие от последовательности ξ не является минимальной. Следовательно, существуют эргодические абсолютно неоднородные последовательности, которые финитно изоморфны, но не изоморфны между собой.

В заключение автор выражает благодарность В. Г. Винокурову за постановку задачи, помощь и внимание, а также Я. Г. Синаю за полезные обсуждения.

Институт математики им. В. И. Романовского
Академии наук УзССР
Ташкент

Поступило
7 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Рохлин, УМН, 22, в. 5, 3 (1967). ² А. М. Вершик, ДАН, 193, № 4, 748 (1967). ³ А. А. Кириллов, УМН, в. 5, 67 (1967). ⁴ В. Г. Винокуров, Б. А. Рубштейн, Сборн. Случайные процессы и смежные вопросы, в. 2, Ташкент, 1972, стр. 49. ⁵ Л. М. Абрамов, В. А. Рохлин, Вестн. Ленингр. унив., № 2, в. 7, 5 (1962).