

М. А. РУТМАН, Л. Т. ИГНАТЕНКО

О ПОРЯДКЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОГО РОСТА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 14 I 1972)

Рассмотрим разностную краевую задачу

$$\Delta_1^{p_1} \dots \Delta_n^{p_n} y - \sum A_{q_1 \dots q_n} \Delta_1^{q_1} \dots \Delta_n^{q_n} y = x, \quad (1)$$

$$y|_{0 \leq t_j < p_j \delta_j} = f_j(t_1, \dots, t_n), \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (2)$$

в области $0 \leq t_1, \dots, t_n < \infty$. Здесь $\Delta_j y = \frac{1}{\delta_j} [y(t_1, \dots, t_{j-1}, t_j + \delta_j, t_{j+1}, \dots, t_n) - y(t_1, \dots, t_n)]$, $\delta_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, $y = y(t_1, \dots, t_n)$, $x = x(t_1, \dots, t_n)$ — элементы пространства C_E , т. е. непрерывные функции, значения которых принадлежат банахову пространству E ; $A_{q_1 \dots q_n} = A_{q_1 \dots q_n}(t_1, \dots, t_n)$ — семейства линейных (ограниченных) операторов, действующих в E . Эти семейства предполагаются компактными и имеющими слабую вариацию на бесконечности (см., например, ^(6, 7)). Последнее означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует $T = T(\varepsilon)$ такое, что из $\sum t_j' \geq T$, $\sum t_j'' \geq T$, $\sum |t_j' - t_j''| < 1$ следует $\|A_{q_1 \dots q_n}(t_1', \dots, t_n') - A_{q_1 \dots q_n}(t_1'', \dots, t_n'')\| < \varepsilon$.

Первый член уравнения (1) является «старшим»: $p_j \geq q_j$, $\sum p_j > \sum q_j$.

Краевая задача (1), (2) рассматривалась в ⁽¹⁾. Там был установлен критерий устойчивости, т. е. необходимое и достаточное условие, при котором всяким ограниченным $x(t_1, \dots, t_n)$ и $f_j(t_1, \dots, t_n)$, $j = 1, \dots, n$, отвечает ограниченное решение $y(t_1, \dots, t_n)$. В настоящей работе задача (1), (2) подвергается более полному исследованию. Мы устанавливаем зависимость между экспоненциальным классом, к которому принадлежат x и f_j , и соответствующим классом, покрывающим совокупность решений. Подобное исследование, однако, для дифференциальных краевых задач и в менее завершеном виде содержится в ⁽²⁾.

Как и в ^(1, 2), для упрощения и не в ущерб общности рассматриваем нулевые начальные условия

$$y|_{0 \leq t_j < p_j \delta_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (2^0)$$

Выделим из пространства C_E подпространство $C_{E; \alpha}$, $-\infty < \alpha < \infty$, функций, удовлетворяющих условию

$$\sup \|x(t_1, \dots, t_n)\| \exp [-\alpha(t_1 + \dots + t_n)] < \infty.$$

Легко показать, что для всякого $x \in C_{E; \alpha}$ решение y принадлежит некоторому $C_{E; \beta}$. Если же x пробегает всё $C_{E; \alpha}$, то совокупность решений покрывается пространством $C_{E; \beta}$ при достаточно большом β . Пусть $\kappa(\alpha)$ — точная нижняя грань таких β . Имеет место следующая

Теорема. Существует α_0 такое, что $\kappa(\alpha) = \alpha_0$ при $\alpha \leq \alpha_0$; $\kappa(\alpha) = \alpha$ при $\alpha > \alpha_0$. Указанная точная нижняя грань достигается при всяком $\alpha \neq \alpha_0$ и не достигается при $\alpha = \alpha_0$ (т. е. если x пробегает $C_{E; \alpha_0}$, то сово-

жупность решений $\{y\}$ покрывается $C_{E; \alpha_0 + \varepsilon}$ при произвольном $\varepsilon > 0$, но не покрывается $C_{E; \alpha_0}$.

Доказательство проводится по следующей схеме. Рассмотрим сперва простейшую задачу при $n = 1$:

$$\begin{aligned} \Delta y - \lambda y &= x, & 0 \leq t < \infty, \\ y(t) &= \theta & \text{при } 0 \leq t < \delta. \end{aligned} \quad (3)$$

Она равносильна операторному уравнению

$$y - \lambda S y = S x,$$

где

$$S x(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n} x\left(\frac{k}{n} t\right)$$

— дискретный аналог оператора интегрирования. В пространстве функций, аннулирующихся левее нуля, оператор S вольтерров. Решение задачи (3) можно записать в виде

$$y = (I - \lambda S)^{-1} S x = \sum_1^{\infty} \lambda^n S^{n+1} x. \quad (4)$$

Используя (4), получаем

$$y(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t}{n} x\left(\frac{k}{n} t\right) \left(1 + \lambda \frac{t}{n}\right)^{n-k}.$$

Из этой формулы нетрудно получить требуемый результат. При этом оказывается, что $\alpha_0 = \frac{1}{\delta} \ln |1 + \lambda \delta|$.

Для краевой задачи

$$\begin{aligned} \Delta y - A y &= x, & 0 \leq t < \infty, \\ y(t) &= \theta, & 0 \leq t < \delta, \end{aligned}$$

где A — «постоянный» оператор, действующий в E , соответствующее операторное уравнение

$$y - S A y = S x$$

решается по формуле, приведенной в (3):

$$y = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} (I - \lambda S)^{-1} (A - \lambda I)^{-1} S x d\lambda.$$

Здесь γ — контур, окружающий спектр оператора A .

Теорема доказывается с помощью этой формулы, причем

$$\alpha_0 = \frac{1}{\delta} \sup_{\lambda \in \sigma(A)} \ln |\lambda \delta + 1|, \quad \sigma(A) — \text{спектр } A$$

Для краевой задачи (1), (2) при «постоянных» операторах $A_{q_1 \dots q_n}$ решение представляется в виде

$$\begin{aligned} y &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^n \oint_{\gamma_1} \dots \oint_{\gamma_n} (I - \lambda_1 S_1)^{-1} \dots (I - \lambda_n S_n)^{-1} \left(I - \sum \frac{A_{q_1 \dots q_n}}{\lambda_1^{p_1 - q_1} \dots \lambda_n^{p_n - q_n}}\right)^{-1} \times \\ &\quad \times S_1^{p_1} \dots S_n^{p_n} x \frac{d\lambda_1}{\lambda_1} \dots \frac{d\lambda_n}{\lambda_n} \end{aligned} \quad (5)$$

(см. (4)). Контур $\gamma_1 \dots \gamma_n$ определяются множеством $\sigma = \sigma\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ особенностей оператор-функции

$$\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(I - \sum \frac{A_{q_1 \dots q_n}}{\lambda_1^{p_1 - q_1} \dots \lambda_n^{p_n - q_n}}\right)^{-1},$$

исследованной в (3). Эти контуры должны быть выбраны так, чтобы при всяких $\lambda_j \in \gamma_j$ точка $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ была регулярной для $\Gamma(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. Теорем получается путем анализа формулы (5), причем

$$\alpha_0 = \sup_{\sigma(A)} \inf_j \frac{1}{\delta_j} \ln |1 + \lambda_j \delta_j|.$$

Наконец, в общем случае $(A_{q_1 \dots q_n} = A_{q_1 \dots q_n}(t_1, \dots, t_n))$ краевая задача (1), (2⁰) исследуется с помощью методов, развитых в (4). α_0 определяется следующим образом. Рассмотрим множество всевозможных ω -предельных систем операторов $A_{q_1 \dots q_n}^{(\omega)}$, порождаемых семействами $A_{q_1 \dots q_n}(t_1, \dots, t_n)$ на общих последовательностях $t_1^{(m)}, \dots, t_n^{(m)}$ таких, что $\sum_{m \rightarrow \infty} t_j^{(m)} \rightarrow \infty$. Для каждой такой системы строим

$$\Gamma^{(\omega)}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \left(I - \sum \frac{A_{q_1 \dots q_n}^{(\omega)}}{\lambda_1^{p_1 - q_1} \dots \lambda_n^{p_n - q_n}} \right)^{-1},$$

и пусть $\sigma^{(\omega)}$ — множество особенностей $\Gamma^{(\omega)}$. Тогда

$$\alpha_0 = \sup_{(\omega)} \sup_{\sigma^{(\omega)}} \inf_j \frac{1}{\delta_j} \ln |1 + \lambda_j \delta_j|.$$

Частным следствием этой формулы является основной результат (критерий устойчивости) из (1). В самом деле, краевая задача устойчива тогда и только тогда, когда $\alpha_0 < 0$, но это выполняется одновременно с неравенством

$$\sup_{(\omega)} \sup_{\sigma^{(\omega)}} \inf_j |1 + \lambda_j \delta_j| < 1.$$

Отметим еще, что при $\delta_j \rightarrow 0$ (дифференциальная краевая задача)

$$\frac{1}{\delta_j} \ln |1 + \lambda_j \delta_j| \rightarrow \operatorname{Re} \lambda_j, \quad \alpha_0 = \sup_{\omega} \sup_{\sigma^{(\omega)}} \operatorname{Re} \lambda_j.$$

Последняя формула существенно дополняет основной результат из (2), где выражение для α_0 приведено лишь для некоторых частных случаев.

Одесский электротехнический институт связи
им. А. С. Попова

Поступило
6 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ М. А. Рутман, ДАН, 159, № 2, 273 (1964). ² М. А. Рутман, ДАН, 124, № 4, 764 (1959). ³ М. А. Рутман, ДАН, 101, № 2, 217 (1955). ⁴ М. А. Рутман, ДАН, 147, № 4, 790 (1962). ⁵ Р. К. Романовский, Вопросы математической физики и теории функций, 1964. ⁶ М. Г. Крейн, УМН, 3, в. 3 (25), 166 (1948). ⁷ К. П. Персидский, Изв. Физ.-матем. общ. при Казанском ун-ве, ч. 1, 8, сер. 3, 47 (1936).