

УДК 519.47+512.98

МАТЕМАТИКА

Л. В. САБИНИН

К ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ КАТЕГОРИЙ ЛУП И ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 4 I 1972)

Важность эквивалентности некоторых категорий (например, локальных групп Ли и алгебр Ли) общеизвестна. В настоящей работе будет установлена эквивалентность категорий некоторых алгебраических структур, в частности луп и однородных пространств. Таким образом, задачи теории луп могут рассматриваться как задачи теории однородных пространств, т. е. по существу как задачи теории групп. Это особенно важно для аналитических луп ⁽¹⁾, так как соответствующие однородные пространства связаны с группами Ли, которые достаточно хорошо изучены.

Напомним, что левая квазигруппа — это магма (группоид) $M(T)$, в которой уравнение $aTx = b$ однозначно разрешимо: $x = a \setminus b$. Левая квазигруппа M с правой единицей ε ($aT\varepsilon = a \ \forall a \in M$) называется левой лупой. Аналогично определяются правые квазигруппы и лупы. Квазигруппа — одновременно левая и правая квазигруппа; лупа — квазигруппа с двусторонней единицей. В дальнейшем мы рассмотрим конструкции в левых квазигруппах, однородных пространствах и т. д., правые конструкции вводятся аналогично. Полученные результаты приводим без доказательства.

Пусть $Q(\cdot)$ — левая квазигруппа, тогда левые сдвиги $L_a, L_ax = a \cdot x$, $L_a^{-1}y = a \setminus y$, порождают группы левых сдвигов L_q в группе подстановок $\mathfrak{S}_Q$ множества Q . Действие $h \in \mathfrak{S}_Q$ на $q \in Q$ обозначим hq . Уравнение $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot x$ имеет единственное решение $x = l(a, b)c$, где

$$l(a, b)_x = L_{(a \cdot b)}^{-1} \circ L_a \circ L_b, \quad (1)$$

и подстановки $l(a, b)$ порождают группу $as_l(Q) \subset L_q \subset \mathfrak{S}_Q$ — левый ассоциант левой квазигруппы $Q(\cdot)$. Очевидно, $(Q(\cdot)$ ассоциативна) $\Leftrightarrow (as_l(Q) = \{id_Q\})$.

Введем еще $m: Q \times \mathfrak{S}_Q \rightarrow \mathfrak{S}_Q$ правилом

$$m_q(h) = m(q, h) \stackrel{\text{def}}{=} L_{(hq)}^{-1} \circ h \circ L_q \circ h^{-1} \quad \forall q \in Q, \quad \forall h \in \mathfrak{S}_Q. \quad (2)$$

Очевидно, $(m_q(h) = \{id_Q\}) \Leftrightarrow (h — \text{автоморфизм левых квазигруппы } Q)$, так что $m_q(h)$ описывает «отклонение» h от автоморфизма. Левая квазигруппа $Q(\cdot)$ называется специальной ⁽²⁾, если

$$m_q(as_l(Q)) = \{id_Q\} \quad (3)$$

(т. е. $\forall h \in as_l(Q)$ h есть автоморфизм в Q).

Группу $H \subset \mathfrak{S}_Q$ назовем левым трансассоциантом левых групп Q , если

$$as_l(Q) \subset H, \quad m_q(H) \subset H, \quad (4)$$

и трансассоциантом левых луп Q , если еще H сохраняет правую единицу ε лупы Q :

$$H\{\varepsilon\} = \{\varepsilon\}. \quad (5)$$

Минимальный левый трансассоциант левой квазигруппы (луны) Q будем обозначать $As_l(Q)$, он, очевидно, получается из $as_l(Q)$ неограниченным расширением при помощи операторов m_q и операций порождения подгруппы из подмножества (в случае левой луны следует учесть, что имеет место $as_l(Q) \{ \varepsilon \} = \{ \varepsilon \}$ и $h\varepsilon = \varepsilon \Rightarrow m_q(h)\varepsilon = \{ \varepsilon \}$). Можно доказать, что

$$as_l(Q) = As_l(Q) \subset L_Q. \quad (6)$$

Опишем теперь основную конструкцию «полупрямого произведения» $Q \boxtimes H$ левой квазигруппы $Q(\cdot)$ и ее левого трансассоцианта H .

Определение 1. Пусть $Q(\cdot)$ — левая квазигруппа (луна), а H — ее левый трансассоциант. Множество $Q \times H$, наделенное внутренним законом композиции $(\cdot)$

$$(q_1, h_1) \cdot (q_2, h_2) \stackrel{\text{def}}{=} (q_1 \cdot h_1 q_2, l(q_1, h_1 q_2) \circ m_{q_2}(h_1) \circ h_1 \circ h_2), \quad (7)$$

где (см. (1) и (2))

$$l(a, b) = L_{(a \cdot b)}^{-1} \circ L_a \circ L_b, \quad m_q(h) = L_{(hq)}^{-1} \circ h \circ L_q \circ h^{-1}, \quad (8)$$

назовем полупрямым произведением Q и H и обозначим $Q \boxtimes H$. Заметим, что структура левой квазигруппы (луны) обеспечивает существование $l(a, b)$, $m_q(h)$, а корректность правой части выражения (7) обеспечивается тем, что H — левый трансассоциант.

Теорема 1. Полупрямое произведение $Q \boxtimes H$ левой квазигруппы Q и ее трансассоцианта H есть полугруппа с левым делением (т. е. левая квазигруппа и полугруппа).

Теорема 2. Полупрямое произведение $Q \boxtimes H$ левой луны Q и ее трансассоцианта H есть группа.

Теорема 3. Пусть $Q(\cdot)$ — левая луна, тогда правило

$$H \ni h \rightarrow (\varepsilon, L_\varepsilon^{-1} \circ h) \in Q \boxtimes H$$

есть инъективный гомоморфизм.

Множество $\tilde{Q} = (Q, \text{id}_Q)$ есть сечение пространства левых классов смежности $Q \boxtimes H / i(H)$ и $\tilde{Q} \cap i(H) = \{(\varepsilon, \text{id}_Q)\}$, $\tilde{Q} \cdot i(H) = Q \boxtimes H$ (так как $(q, \text{id}_Q) \cdot (\varepsilon, L_\varepsilon^{-1} \circ h) = (q, h)$).

Замечание. Если ε — двусторонняя единица в Q , то $L_\varepsilon^{-1} = \text{id}_Q$ и формулы соответственно упрощаются.

Теорема 4. Пусть $Q(\cdot)$ — левая луна, а $\text{pr}_Q: Q \boxtimes H \rightarrow (Q, \text{id}_Q) = \tilde{Q}$, определяется правилом $\text{pr}_Q(q, h) = (q, \text{id}_Q)$. Введем на $\tilde{Q}$ внутренний закон композиции

$$\tilde{q}_1 \square \tilde{q}_2 = (q_1, \text{id}_Q) \square (q_2, \text{id}_Q) \stackrel{\text{def}}{=} \text{pr}_Q [l(q_1, \text{id}_Q)(q_2, \text{id}_Q)] = (q_1 \cdot q_2, \text{id}_Q);$$

тогда $\tilde{Q}(\square)$ — луна, изоморфная $Q(\cdot)$, а $Q \ni q \leftrightarrow (q, \text{id}_Q) \in (Q, \text{id}_Q) = \tilde{Q}$ — изоморфизм.

Теорема 5. Пусть $Q(\cdot)$ — левая луна, а H — ее трансассоциант; тогда каноническое действие $Q \boxtimes H$ на Q

$$(q, h)x \stackrel{\text{def}}{=} (L_q \circ h)x = q \cdot hx$$

точно и транзитивно на Q , так что Q — однородное пространство; при этом $i(H) = (\varepsilon, H)$ — стационарная группа вышеуказанного действия, так что $Q \sqsubset H / i(H)$ можно отождествить с луной $Q(\cdot)$, наделенной каноническим действием.

Теоремы 3 и 4 показывают, что $Q \boxtimes H / i(H)$ можно отождествить с луной $\tilde{Q} = (Q, \text{id}_Q) \simeq Q$, т. е. полученное однородное пространство канонически наделено структурой луны, изоморфной исходной луне Q . Оказывается, что любое левое однородное пространство G/R можно наделить структурой левой луны Q , причем так, чтобы $Q \boxtimes H / i(H) \simeq G/R$ при не-

котором выборе трансассоцианта H . Сформулируем необходимые определения.

Определение 2. Пусть G/R — однородное левое пространство. Сечение Q пространства левых классов смежности G/R назовем квазиредуктантом в G/R , а G/R с фиксированным квазиредуктантом Q назовем квазиредуктивным. (Таким образом, $\forall g \in G \quad Q \cap gR$ одноэлементно.) Если при этом $\forall h \in R : hQh^{-1} \subset Q$, то будем говорить, что Q — редуктант, а G/R редуктивно.

Очевидно, если Q — квазиредуктант в G/R , то $G = Q \cdot R$, $Q \cap R = \{x_0\}$ одноэлементно, а если Q — редуктант, то $x_0 \in Z_R$ — центру подгруппы R .

Определение 3. Квазиредуктант Q в G/R однороден, если $Q \cap R = \{1_G\}$.

Теорема 6. Пусть Q — квазиредуктант в G/R , тогда $\forall g \in G$ имеет место и однозначно разложение $g = q \cdot r$, где $q \in Q$, $r \in R$; так что для $\forall g \in G$ определены однозначные отображения $g \xrightarrow{\pi_Q} q \in Q$ и $g \xrightarrow{\pi_R} r \in R$ и соответствие $G \ni g \rightarrow (\pi_Q g, \pi_R g)$ биективно.

Введем на квазиредуктанте Q в G/R внутренний закон

$$\forall q_1, q_2 \in Q \quad q_1 \circ q_2 = \pi_Q(q_1 \circ q_2). \quad (9)$$

Теорема 7. Квазиредуктант Q в левом однородном пространстве G/R , наделенный внутренним законом композиции (9), есть левая луна с правой единицей $\varepsilon = \pi_Q(1_G)$ ($Q \cap R = \{\varepsilon\}$).

Далее всюду считаем, что квазиредуктант рассматривается как луна. Введем $R \rightarrow \mathfrak{S}_Q$ правилом

$$\hat{h}q = \pi_Q(hqh^{-1}); \quad \forall h \in R, \quad \forall q \in Q \quad \{\hat{h}\}_{h \in R} \stackrel{\text{def}}{=} \hat{R}. \quad (10)$$

Теорема 8. Отображение (10) $R \rightarrow \mathfrak{S}_Q$ есть точное представление R на левой луне $Q(\cdot)$; $l(q_1, q_2) = \pi_R(q_1, q_2)$, $m_q(\hat{h}) = \pi_R(hqh^{-1})'$ и $\hat{R}$ — трансассоциант в $Q(\cdot)$.

Теорема 9. Пусть Q — квазиредуктант в левом G/R и $Q \cap R = \{h_0\}$, тогда умножение в группе G : $g_1 g_2$ индуцирует умножение в множестве $Q \times R$:

$$(q_1, \hat{h}_1)(q_2, \hat{h}_2) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi_Q(q_1 h_1 q_2 h_2), \pi_R(q_1 h_1 q_2 h_2)),$$

которое наделяет $Q \times R$ структурой группы $Q \boxtimes \hat{R}$, изоморфной группе G

при отображении $G \ni g \leftrightarrow (\pi_Q(g), \pi_R(g)) \in Q \times \hat{R}$. При этом $Q \boxtimes \hat{R} / i(\hat{R}) \simeq G/R$, а $Q \xrightarrow[\pi^{-1}]{\pi} \tilde{Q} = (Q, \text{id}_Q)$ есть изоморфизм лун; так что

$$\begin{aligned} \pi_Q(q_1 h_1 q_2 h_2) &= q_1 \circ \hat{h}_1 q_2, \\ \pi_R(q_1 h_1 q_2 h_2) &= l(q_1, \hat{h}_1, q_2) \circ m_{q_2}(\hat{h}_1) \circ \hat{h}_1 \circ \hat{h}_2, \end{aligned} \quad (11)$$

где

$$l(a, b) = \pi_R(ab) = L_{(ab)}^{-1} \circ L_a \circ L_b, \quad m_q(\hat{h}) = \pi_R(hqh^{-1}) = L_{\hat{h}q}^{-1} \circ \hat{h} \circ L_q \circ \hat{h}^{-1}$$

(см. (7), (8)).

Обозначим через $\text{Aut}(Q)$ группу автоморфизмов луны Q .

Теорема 10. Если Q — левая специальная луна, а H — ее трансассоциант такой, что $m_Q(H) = \{\text{id}_Q\}$ (в частности, это выполняется для $H = \text{as}_l(Q)$), т. е. H — подгруппа в $\text{Aut}(Q)$, то $Q \boxtimes H / i(H)$ редуктивно, а $\tilde{Q} = (Q, \text{id}_Q)$ — его редуктант.

Наоборот, если левое G/R однородно с редуктантом Q , то Q — специальная луна, а $\hat{R}$ — подгруппа в $\text{Aut}(Q)$.

Следствие. Если в теореме 10 Q — группа, то $Q \boxtimes H$ есть классическое полупрямое произведение Q на подгруппу H группы ее автоморфизмов ⁽³⁾.

Теорема 11. Пусть $Q(\cdot)$ и $\tilde{Q}(\circ)$ — две левые луны, порожденные квазиредуктантами левого G/R , а $\mu: \tilde{Q} \rightarrow Q$ — каноническая биекция отождествления по классам смежности ($\mu = (\pi_Q)|_{\tilde{Q}}$); тогда

$$\mu(\mu^{-1}(q_1) \circ \mu^{-1}(q_2)) = q_1 \cdot \theta(q_1) q_2, \theta(q_1) \in \hat{R}. \quad (12)$$

Наоборот, если две левые луны связаны соотношением (12), где μ — биекция, а $\hat{R}$ — трансассоциант в $Q(\cdot)$, то $\mu^{-1} \circ R \circ \mu$ — трансассоциант в $\tilde{Q}(\circ)$ и

$$Q \boxtimes \hat{R} / i(\hat{R}) \simeq \tilde{Q} \boxtimes (\mu^{-1} \circ \hat{R} \circ \mu) / i(\mu^{-1} \circ \hat{R} \circ \mu).$$

Теорема 12. (Левая луна $Q(\cdot)$ с двусторонней единицей ε) $\Leftrightarrow$ (соответствующий ей квазиредуктант $\tilde{Q}$ однородного пространства $Q \boxtimes H / i(H)$ однороден).

Сформулируем теперь основные результаты на языке категорий. Введем категории лул:

I. $\text{KAT}\{Q, H\}$ с объектами (Q, H) , где Q — левая луна, а H — ее трансассоциант, и морфизмами — изоморфизмами пар (под изоморфизмом здесь следует понимать не просто изоморфизмы Q и H по отдельности, так как изоморфизм $Q \rightarrow Q'$ индуцирует изоморфизм $\text{As}_l(Q) \rightarrow \text{As}_l(Q')$, а такие, что изоморфизм $H \rightarrow H'$ согласован с $\lambda: \nu|_{\text{As}_l(Q')} = \lambda$).

II. $\text{KAT}\{Q\}$ с объектами Q — левыми лунами и морфизмами — изоморфизмами левых лул. Это подкатегория в $\text{KAT}\{Q, H\}$, если отождествить $Q \in \text{Ob}_{\text{KAT}\{Q\}}$ с $(Q, \text{As}_l(Q)) \in \text{Ob}_{\text{KAT}\{Q, H\}}$.

III. $\text{KAT}\{\text{SP}, Q\}$ — подкатегория в $\text{KAT}\{Q\}$, где объекты Q — специальные левые луны.

Теперь введем категории однородных пространств.

IV. $\text{KAT}\{G/R, Q\}$ с объектами $(G/R, Q)$, где Q — квазиредуктант в левом однородном G/R , и морфизмами — изоморфизмами G'/R' и G/R , индуцирующими изоморфизм квазиредуктантов Q' и Q .

V. $\text{KAT}\{\min G/R, Q\}$, подкатегория $\text{KAT}\{G/R, Q\}$, где G/R минимальны (т. е. группу стационарности нельзя «сузить» на однородном пространстве G/R . Точный смысл: G/R не минимально, если существует квазиредуктант Q_1 и подгруппа $G_1 \subset G$ такие, что $Q_1 \subset G_1 \neq G$).

VI. $\text{KAT}\{\min G/R, \text{SP}, Q\}$ — подкатегория в $\text{KAT}\{\min G/R, Q\}$, где Q — редуктанты.

Теорема 13. $\text{KAT}\{Q, H\}$ и $\text{KAT}\{G/R, Q\}$, $\text{KAT}\{Q\}$ и $\text{KAT}\{\min G/R, Q\}$, $\text{KAT}\{\text{SP}, Q\}$ и $\text{KAT}\{\min G/R, \text{SP}, Q\}$ эквивалентны.

Набросок доказательства. Построение полупрямого произведения левой луны и трансассоцианта в теореме 2 есть построение функтора из категорий лул в категории соответствующих однородных пространств. Теорема 9 фактически описывает построение обратного функтора.

Университет дружбы народов
им. Патриса Лумумбы
Москва

Поступило
23 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ А. И. Мальцев, Матем. сборн., 36 (78), № 3 (1955). ² В. Д. Белоусов, Основы теории квазигрупп и лул, «Наука», 1967. ³ М. Холл, Теория групп, М., 1962.