

УДК 513/516:513.88

МАТЕМАТИКА

Н. С. СОЛТАН

ТЕОРЕМА ХЕЛЛИ ДЛЯ d-ВЫПУКЛЫХ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 14 I 1972)

Пусть X — метрическое пространство, метрика которого обозначена через d .

Определение 1 (см. (3)). Множество $M \subset X$ назовем d -выпуклым, если из соотношения

$$d(x_1, x_2) = d(x_1, x_3) + d(x_3, x_2), \quad x_1, x_3 \in M,$$

следует включение $x_3 \in M$.

Очевидно, что в любом метрическом пространстве X существуют d -выпуклые множества (например, все пространство X). Очевидно также, что если $\mathcal{M} = \{M_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — семейство d -выпуклых множеств пространства X , то множество

$$M = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

является d -выпуклым.

Определение 2. Пусть $N \subset X$ — непустое множество, а $\mathcal{M} = \{M_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — семейство всех d -выпуклых множеств из X , содержащих N . Множество

$$d\text{-conv } N = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} M_\lambda$$

назовем d -выпуклой оболочкой множества N .

Пусть теперь $\mathcal{R}$ — банахово пространство с нормой $\|x\|$ и метрикой $d(x_1, x_2) = \|x_1 - x_2\|$. В таком случае в $\mathcal{R}$ можно рассматривать как выпуклые (в обычном смысле (6)), так и d -выпуклые множества. Очевидно, что d -выпуклое множество $M \subset \mathcal{R}$ является выпуклым. Обратное, вообще говоря, неверно. Далее, d -выпуклость совпадает с выпуклостью в том и только в том случае, когда единичный шар в $\mathcal{R}$ является строго выпуклым. Отметим еще, что множество $M \subset \mathcal{R}$ тогда и только тогда является d -выпуклым, когда для любых $x_1, x_2 \in M$ каждая простая дуга, соединяющая x_1 и x_2 и имеющая длину $\|x_1 - x_2\|$, содержится в M . В дальнейшем будем предполагать, что $\dim \mathcal{R} = n < \infty$.

Определение 3. Размерностью Хелли $h(\mathcal{R}^n)$ банахова пространства $\mathcal{R}^n$ назовем такое минимальное целое число r , что любое конечное семейство $\mathcal{S}$ d -выпуклых множеств из $\mathcal{R}^n$ имеет непустое пересечение, как только в нем имеет непустое пересечение каждое подсемейство $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ с $\text{card } \mathcal{P} = r + 1$.

Ясно, что размерность Хелли $h(\mathcal{R}^n)$ пространства $\mathcal{R}^n$ всегда существует и не превосходит $n = \dim \mathcal{R}^n$ (см. (2)).

Цель заметки — привести точную оценку размерности Хелли $h(\mathcal{R}^n)$ пространства $\mathcal{R}^n$.

Пусть $\mathcal{R}^k$ и $\mathcal{R}^l$, $k + l = n$, — подпространства, прямая сумма которых совпадает с $\mathcal{R}^n$ а Σ^k и Σ^l — выпуклые множества соответственно в $\mathcal{R}^k$ и $\mathcal{R}^l$, содержащие начало координат O в качестве своей внутренней точки. Обозначим через Σ^n выпуклую оболочку множеств Σ^k и Σ^l , т. е. $\Sigma^n = \text{conv}_n(\Sigma^k \cup \Sigma^l)$. Легко доказывается, что точка $x \in \Sigma^n$ в том и только в том случае является граничной точкой множества Σ^n , когда x принадле-

жит либо множеству $\Sigma^k \cup \Sigma^l$, либо отрезку $[a, b]$, концы которого являются граничными точками соответственно множеств Σ^k и Σ^l относительно их несущих плоскостей. В случае $l=1$ множество Σ^n называется надстройкой над множеством Σ^{n-1} и обозначается через $E\Sigma^{n-1}$ (см. (1)). Множество $E^m \Sigma^{n-m} = E(E^{m-1} \Sigma^{n-m})$ называется m -кратной надстройкой над Σ^{n-m} .

Теорема 1. Пусть $\Sigma^n, \Sigma^k, \Sigma^l$ — единичные шары банаховых пространств $\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^k, \mathcal{R}^l$, причем $\mathcal{R}^n = \mathcal{R}^k \oplus \mathcal{R}^l$ и $\Sigma^n = \text{conv}_n(\Sigma^k \cup \Sigma^l)$.

Тогда размерность Хелли $h(\mathcal{R}^n)$ пространства $\mathcal{R}^n$ удовлетворяет соотношению

$$h(\mathcal{R}^n) = \max \{h(\mathcal{R}^k), h(\mathcal{R}^l)\}.$$

Предварительно докажем следующие две леммы.

Лемма 1. В условиях теоремы 1 для любых трех точек x, y, z , обладающих тем свойством, что $[x, y] \parallel \mathcal{R}^k, [y, z] \parallel \mathcal{R}^l$, справедливо соотношение $d(x, z) = d(x, y) + d(y, z)$.

Доказательство. Положим $a = y - x, b = z - y$. Тогда $a \in \mathcal{R}^k, b \in \mathcal{R}^l$ и доказываемое соотношение имеет вид $\|a + b\| = \|a\| + \|b\|$. Рассмотрим лучи p, q, r , исходящие из начала координат O и проходящие через точки $a, b, a + b$. Точки пересечения этих лучей с границей шара Σ^n обозначим через a', b', c' . Таким образом, $a + b = kc', a = k'a', b = k''b''$, где числа k, k', k'' неотрицательны. При этом $\|a'\| = \|b'\| = \|c'\| = 1$ и поэтому $\|a\| = k', \|b\| = k'', \|a + b\| = k$. Заметим, что так как a', b' являются граничными точками выпуклых множеств Σ^k, Σ^l , то весь отрезок $[a', b']$ расположен на границе шара Σ^n . А так как отрезок $[a', b']$ и луч r лежат в одной двумерной плоскости, то точка пересечения отрезка $[a', b']$ и луча r существует и является граничной точкой тела Σ^n . Это означает, что отрезок $[a', b']$ и луч r пересекаются в точке c' . Полагая $a_1 = \frac{1}{k} b_1 = \frac{1}{k} b$ (так что $a_1 + b_1 = c'$), немедленно получим, что $k' + k'' = k$, а это, очевидно, завершает доказательство леммы 1.

Теперь обозначим через π_k проекцию пространства $\mathcal{R}^n$ на $\mathcal{R}^k$ параллельно $\mathcal{R}^l$, а через π_l — проекцию пространства $\mathcal{R}^n$ на $\mathcal{R}^l$ параллельно $\mathcal{R}^k$. Далее, через $d\text{-conv}_n, d\text{-conv}_k, d\text{-conv}_l$ обозначим операцию образования d -выпуклой оболочки соответственно в пространствах $\mathcal{R}^n, \mathcal{R}^k, \mathcal{R}^l$.

Лемма 2. Для любого множества N банахова пространства $\mathcal{R}^n$, удовлетворяющего условиям теоремы 1, справедливо соотношение $d\text{-conv}_n N = (d\text{-conv}_k \pi_k(N)) \times (d\text{-conv}_l \pi_l(N))$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $O \in N$. Пусть $x \in N$ и $y \in \pi_k(x)$. Тогда $y \in \mathcal{R}^k, x - y \in \mathcal{R}^l$, и потому, в силу леммы 1, $d(o, x) = d(o, y) + d(y, x)$. Следовательно, $y \in d\text{-conv}_n N$. Этим доказано включение $\pi_k(N) \subset d\text{-conv}_n N$. Но тогда $d\text{-conv}_n \pi_k(N) \subset \subset d\text{-conv}_n \pi_k(N) \subset d\text{-conv}_n (d\text{-conv}_n N) = d\text{-conv}_n N$. Аналогичным образом получаем включение $d\text{-conv}_l \pi_l(N) \subset d\text{-conv}_n N$.

Пусть теперь $z = a + b$, где $a \in d\text{-conv}_k \pi_k(N), b \in d\text{-conv}_l \pi_l(N)$. Тогда, в силу леммы 1, имеем $d(a, b) = d(a, z) + d(z, b)$, и потому $z \in d\text{-conv}_n (d\text{-conv}_k \pi_k(N)) \cup (d\text{-conv}_l \pi_l(N)) \subset d\text{-conv}_n (d\text{-conv}_n N) = d\text{-conv}_n N$. Этим, очевидно, доказано включение $d\text{-conv}_n N \supset (d\text{-conv}_k \pi_k(N)) \times \times (d\text{-conv}_l \pi_l(N))$.

Для доказательства обратного включения рассмотрим множество $C = \pi_k^{-1}(d\text{-conv}_k \pi_k(N))$. Оно представляет цилиндр, образованный всеми плоскостями, параллельными $\mathcal{R}^l$ и проходящими через точки множества $d\text{-conv}_k \pi_k(N)$. Покажем, что этот цилиндр является d -выпуклым множеством в пространстве $\mathcal{R}^n$. Пусть $z \in d\text{-conv}_n C$. Тогда, очевидно, $z' = \pi_k(z) \in \subset d\text{-conv}_k C$. Иначе говоря, существуют такие точки $x, y \in C$, что $d(x, y) = d(x, z') + d(z', y)$.

Положим $x' = \pi_k(x), y' = \pi_k(y)$. В силу леммы 1, $d(x, z') = d(x, x') + d(x', z'), d(z', y) = d(z', y') + d(y', y)$. Следовательно, $d(x, y) = d(x, x') + d(x', z') + d(z', y') + d(y', y)$. С другой стороны,

$d(x, y) \leq d(x, x') + d(x', y') + d(y', y)$. Вычитая последнее соотношение из предыдущего, находим $d(x', y') = d(x', y') = d(x', z') + d(z', y')$. Это соотношение имеет место не только во всем пространстве $\mathcal{R}^n$, но и в $\mathcal{R}^h$ (так как $x', y', z' \in \mathcal{R}^h$ и $\Sigma^h = \Sigma^n \cap \mathcal{R}^h$). Из включения $x', y' \in \pi_h(C) = d\text{-conv}_h \pi_h(N)$ следует, что $z' \in d\text{-conv}_h(d\text{-conv}_h \pi_h(N)) = d\text{-conv}_h \pi_h(C) \subset C$, а потому $z \in C$. Таким образом, $d\text{-conv}_n C \subset C$, чем и доказана d -выпуклость множества C . Так как, очевидно, $N \subset C$, то из доказанного вытекает $d\text{-conv}_n N \subset C$. Аналогичным образом доказывается включение $d\text{-conv}_n N \subset D$, где $D = \pi_i^{-1}(d\text{-conv}_i \pi_i(N))$. Следовательно, $d\text{-conv}_n N \subset C \cap D$. Но пересечение $C \cap D$ совпадает с множеством $(d\text{-conv}_h \pi_h(N)) \times (d\text{-conv}_i \pi_i(N))$, откуда и вытекает требуемое включение.

Доказательство теоремы 1. Пусть $\mathcal{M} = \{M_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ — семейство d -выпуклых множеств в $\mathcal{R}^n$, каждые $h(\mathcal{R}^n) + 1$ из которых имеет непустое пересечение. В силу леммы 2 легко заметить, что множество $\pi_h(M_\lambda)$ является d -выпуклым в пространстве $\mathcal{R}^h$. Следовательно, семейство всех множеств $\pi_h(M_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, представляет некоторое семейство d -выпуклых множеств в $\mathcal{R}^h$, каждые $h(\mathcal{R}^n) + 1$ из которых имеют непустое пересечение. А так как, по предположению, размерность Хелли $h(\mathcal{R}^n)$ равно наибольшему из чисел $h(\mathcal{R}^h)$ и $h(\mathcal{R}^i)$, то существует точка $a \in \mathcal{R}^h$, общая всем множествам $\pi_i(M_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$.

Аналогично, существует точка $b \in \mathcal{R}^i$, общая всем множествам $\pi_i(M_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$. Обозначим через c такую точку пространства $\mathcal{R}^n$, что $\pi_h(c) = a$, $\pi_i(c) = b$. Так как в силу леммы 2 $M_\lambda = \pi_h(M_\lambda) \times \pi_i(M_\lambda)$, то $c \in M_\lambda$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Этим доказано, что размерность Хелли $h(\mathcal{R}^n)$ пространства $\mathcal{R}^n$ не превосходит наибольшее из чисел $h(\mathcal{R}^h)$ и $h(\mathcal{R}^i)$. Доказательство неравенства $\max\{h(\mathcal{R}^h), h(\mathcal{R}^i)\} \leq h(\mathcal{R}^n)$ проверяется непосредственным образом, а, следовательно, теорема 1 доказана.

Теорема 2. Если единичный шар Σ^n пространства $\mathcal{R}^n$, $n \geq 2$, представляет m -кратную надстройку $E^m \Sigma^{n-m}$ над шаром Σ^{n-m} некоторого $(n - m)$ -мерного подпространства $\mathcal{R}^{n-m} \subset \mathcal{R}^n$, $n \geq m$, то верно соотношение

$$h(\mathcal{R}^m) = h(\mathcal{R}^{n-m}).$$

Доказательство теоремы 2 получается непосредственно методом индукции по числу m с применением теоремы 1.

Теорема 3. Пусть $\mathcal{F}$ — произвольное семейство d -выпуклых множеств пространства $\mathcal{R}^n$, содержащее не менее $h(\mathcal{R}^n) + 2$ элементов, причем либо $\mathcal{F}$ конечно, либо же каждое множество из $\mathcal{F}$ замкнуто и хотя бы одно из них компактно.

Тогда, если каждые $h(\mathcal{R}^n) + 1$ из множеств семейства $\mathcal{F}$ имеют непустое пересечение, то существует точка, общая всем множествам семейства $\mathcal{F}$.

Доказательство теоремы 3 осуществляется обычной техникой доказательства теоремы Хелли (см., например, ⁽⁶⁾) с использованием теоремы 2.

Замечание 1. Теорему 2 мы будем называть теоремой Хелли для d -выпуклых множеств банахова пространства $\mathcal{R}^n$ ввиду существования полной аналогии между ней и теоремой Хелли для выпуклых множеств (см. ^(2, 6)).

Замечание 2. Проведенные выше рассмотрения перекликаются по своим результатам с работами ^(2, 5, 6), однако здесь мы не будем заниматься уточнением границ пересечения.

Кишиневский государственный
университет

Поступило
29 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. Г. Болтянский, Гомотопическая теория непрерывных отображений векторных полей, Изд. АН СССР, 1955. ² Л. Данцер, Б. Грюнбаум, В. Кли, Теорема Хелли, 1968. ³ П. С. Солтан, К. Ф. Приэкару, ДАН, 198, № 1 (1971). ⁴ B. Szökefalvi-Nadi, Acts Sci. Math., 15, 169 (1954). ⁵ O. Hanner, Math. Scand., 4, 65 (1956). ⁶ Энциклопедия элементарной математики, кн. V, Геометрия, «Наука», 1965.