

УДК 512.86

МАТЕМАТИКА

Академик АН БССР Д. А. СУПРУНЕНКО

МИНИМАЛЬНЫЕ НЕПРИВОДИМЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ ПРОСТОЙ СТЕПЕНИ

Неприводимая группа матриц над полем называется минимальной неприводимой, если ее каждая истинная подгруппа приводима. Ниже дается полная классификация минимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(p, \Delta)$, где p — простое число, а Δ — алгебраически замкнутое поле. Пусть $\mathcal{M}_p$ — совокупность всех минимальных неприводимых разрешимых подгрупп группы $GL(p, \Delta)$. Оказывается, каждая группа из $\mathcal{M}_p$ мономинальна, конечна и либо бипримарна, либо p -группа.

Далее, H из $\mathcal{M}_p$ является группой Миллер — Морено, т. е. каждая истинная подгруппа группы H абелева. Основным результатом работы составляет построение такого подмножества $\mathcal{N}_p$ множества $\mathcal{M}_p$, что каждая подгруппа из $\mathcal{M}_p$ сопряжена в $GL(p, \Delta)$ с одной и только одной подгруппой из $\mathcal{N}_p$. Любая группа из $\mathcal{N}_p$ задается двумя порождающими ее матрицами. (Доказательства будут опубликованы в «Трудах Московского Математического общества».)

1. Серия бипримарных групп. Всюду ниже Δ — алгебраически замкнутое поле, а p — простое число. Введем одну серию подгрупп группы $GL(p, \Delta)$. Если $\text{char } \Delta \neq p$, то для каждого целого неотрицательно-го l зафиксируем элемент $\delta = \delta_l$ порядка p^l из мультипликативной группы Δ^* поля Δ и положим

$$h_l = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \delta \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} \in GL(p, \Delta). \quad (1)$$

Если же $\text{char } \Delta$ совпадает с p , то δ_l и матрица h_l существуют лишь при $l = 0$.

Пусть теперь q — простое число, $q \neq p$, а m — показатель, к которому принадлежит q по модулю p . Тогда, как известно,

$$(x^p - 1)(x - 1)^{-1} = \varphi_1(x) \dots \varphi_v(x),$$

где $v = (p - 1)m^{-1}$, а $\varphi_\tau(x)$ — неприводимый над $GF(q)$ полином степени m , $\tau = 1, \dots, v$.

Положим

$$F_\tau(x) = \frac{x^p - 1}{\varphi_\tau(x)}, \quad \tau = 1, \dots, v, \quad (2)$$

и будем считать нумерацию полиномов (2) фиксированной. Каждому полиному

$$F_\tau(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \dots + \lambda_{p-m} x^{p-m}$$

приведем в соответствие p -мерный вектор над $GF(q)$:

$$\lambda = \lambda^{(\tau)} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-m}, 0, \dots, 0) = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{p-1}).$$

В свою очередь, каждый вектор $\lambda^{(\tau)}$ определяет диагональную матрицу

$$d_0 = d_0^{(\tau)} = \text{diag} [\eta^{\lambda_0}, \eta^{\lambda_1}, \dots, \eta^{\lambda_{p-1}}], \quad (3)$$

где η — элемент порядка q из Δ^* .

Введем теперь серию групп $H_{l,q,\tau}$. Группа $H_{l,q,\tau}$ задается тремя целыми числами: l, q, τ . Если $\text{char } \Delta \neq p$, то l — любое неотрицательное целое; если же $\text{char } \Delta = p$, то $l = 0$. q — любое простое число такое, что $q \neq \text{char } \Delta, q \neq p$.

Область значений τ зависит от l и q . Если $l = 0$, то τ принимает единственное значение: 1. Если же $l > 0$, то τ принимает v значений: $1, \dots, v$, где $v = (p-1)m^{-1}$. $H_{l,q,\tau}$ определяется как группа, порожденная двумя матрицами: h_l и $d_0 = d_0^{(\tau)}$.

Лемма 1. $|H_{l,q,\tau}| = p^{l+1}q^m$, $H = (h_l)(d_0) \dots (d_{m-1})$, где $d_k = h_l^{-k} d_0 h_l^k, k = 0, 1, \dots, m-1$.

Лемма 2. $H_{l,q,\tau} \in \mathfrak{M}_p$.

2. p -Группы из $\mathfrak{M}_p$ при $p > 2$. Пусть $\text{char } \Delta \neq p$, а $p > 2$. Положим

$$a = \text{diag} [1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}], \quad (4)$$

где $\varepsilon \in \Delta, \varepsilon^p = 1, \varepsilon \neq 1$. Группу, порожденную двумя матрицами a и h_l (см. (1) и (4)), обозначим $H_{p^{l+1}, p}$. При $l = 0$ $H_{p^{l+1}, p} = H_{p, p}$ состоит из всех матриц вида $\varepsilon^\alpha a^\beta h_0^\gamma, |H_{p, p}| = p^3$. При $l > 0$ имеем

$$H_{p^{l+1}, p} = (a)(h_l), \quad |H_{p^{l+1}, p}| = p^{l+2}. \quad (5)$$

В частности, $|H_{p^2, p}| = |H_{p, p}| = p^3$, но группы $H_{p^2, p}$ и $H_{p, p}$ не изоморфны, ибо в $H_{p^2, p}$ есть элементы порядка p^2 , а в $H_{p, p}$ таких элементов нет.

Лемма 3. Для любого целого неотрицательного l

$$H_{p^{l+1}, p} \in \mathfrak{M}_p.$$

3. p -Группы из $\mathfrak{M}_p$ при $p = 2$. Пусть $\text{char } \Delta \neq 2$. Положим

$$d_{2,l} = \text{diag} [\omega, -\omega], \quad h_{2,2} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \omega \text{ — элемент порядка } 2^l \text{ из } \Delta^*.$$

Пусть

$$H_{2^2, 2^l}, \quad l = 1, 2, \dots, \quad (6)$$

— группа, порождаемая двумя матрицами $h_{2,2}$ и $d_{2,l}$. При $l = 1$ $H_{2^2, 2^1}$ — группа восьмого порядка, порожденная $h_{2,2}$ и $\text{diag} [-1, 1]$. При $l > 1$ имеем

$$H_{2^2, 2^l} = (h_{2,2})(d_{2,l}), \quad |H_{2^2, 2^l}| = 2^{l+1}. \quad (7)$$

В частности, $|H_{2^2, 2^2}| = |H_{2^2, 2}| = 8$, но группы $H_{2^2, 2}$ и $H_{2^2, 2^2}$ не изоморфны.

Лемма 4. При любом целом положительном l

$$H_{2^2, 2^l} \in \mathfrak{M}_2.$$

4. Основной результат. Теперь построим следующим образом совокупность $\mathfrak{N}_p$ подгрупп группы $GL(p, \Delta)$. Если $\text{char } \Delta = p$, то будем полагать, что $\mathfrak{N}_p$ совпадает с совокупностью всех групп $H_{l,q,\tau}$ бипримарной серии (см. п. 1). Если $\text{char } \Delta \neq p$ и $p > 2$, то будем считать, что $\mathfrak{N}_p$ — объединение двух серий: серии групп $H_{l,q,\tau}$ и серии групп $H_{p^{l+1}, p}$ (см. п. 2). Если же $\text{char } \Delta \neq p$, а $p = 2$, то $\mathfrak{N}_p$ — объединение серии групп $H_{l,q,\tau}$ и серии групп $H_{2^2, 2^l}$ (см. п. 3).

Теорема. 1) $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{M}_p$. 2) Для каждой группы G из $\mathfrak{M}_p$ в $\mathfrak{N}_p$ существует одна и только одна группа, сопряженная с G в $GL(p, \Delta)$.

Поступило
21 IV 1972