

С. Л. КРУШКАЛЬ

ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА И КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 24 I 1972)

В теории модулей римановых поверхностей рассматривались различные реализации пространства Тейхмюллера отмеченных римановых поверхностей данного рода. Каждая такая реализация выявляет определенные свойства модулей этих поверхностей. Здесь мы построим вложение пространства Тейхмюллера в некоторое гильбертово пространство гармонических функций, связанных естественным образом с римановыми поверхностями.

1. Пусть G — конечно-порожденная фуксова группа первого рода без эллиптических элементов с предельной окружностью $|z| = 1$. Впрочем, требование отсутствия эллиптических элементов не существенно и принято, чтобы не усложнять дальнейших рассуждений. Пусть $M(G)$ — множество измеримых на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ функций $\mu(z)$ таких, что $\mu(z)dz/dz$ инвариантно относительно G , $\mu(z) = 0$ в области $U: 1 < |z| \leq \infty$ и $\|\mu\|_\infty < 1$. Рассмотрим квазиконформные автоморфизмы $w = f_\mu(z): \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$ с комплексными характеристиками $w_z/w_{\bar{z}} = \mu(z) \in M(G)$,

нормированные условием $f_\mu(z) = z + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$ при $z \in U$. Каждый

f_μ порождает квазифуксову группу $G^\mu = f_\mu G f_\mu^{-1}$ мёбиусовых отображений плоскости w с предельной кривой $f_\mu(|z| = 1)$, называемую квазиконформной деформацией группы G , и изоморфизм $\chi_\mu: G \rightarrow G^\mu$ по формуле $\chi_\mu(g) = f_\mu \circ g \circ f_\mu^{-1}$, $g \in G$. Считая μ и ν из $M(G)$ эквивалентными, если f_μ и f_ν определяют один и тот же изоморфизм, получим пространство Тейхмюллера $T(G)$ квазиконформных деформаций группы G (или отмеченных римановых поверхностей $S^\mu = f_\mu(|z| < 1) / G^\mu$ определенного конечного типа (p, n) , гомеоморфных замкнутой поверхности рода p с $n \geq 0$ выколотыми точками). Эквивалентность μ и ν равносильна условию $f_\mu(z) = f_\nu(z)$ при $z \in U$. Положим $f_\mu(|z| < 1) = D_\mu$, $f_\mu(U) = D_\mu$.

Введя в рассмотрение производные Шварца $\varphi^\mu(z) = \{f_\mu, z\}$, $z \in U$, можно, в силу доказанного в (1, 2), представить $T(G)$ (и отождествить с точностью до голоморфной эквивалентности) в виде ограниченной области комплексного векторного пространства $B(U, G)$ (или в $\mathbb{C}^m$) голоморфных в U функций $\varphi(z)$ таких, что $\varphi(z) = O(|z|^{-4})$ вблизи $z = \infty$, $\varphi(g(z))g'^2(z) = \varphi(z)$, $g \in G$, с нормой $\|\varphi\| = \sup_{z \in U} (|z|^2 - 1)^2 |\varphi(z)|$;

здесь $m = \dim B(U, G) = 3p - 3 + n > 0$.

2. Каждую группу G^μ можно продолжить (3) до дискретной (клеяной) группы мёбиусовых отображений $x \rightarrow g(x)$ полупространства $E_3^+ = \{x: x = (x_1, x_2, x_3), x_1 + ix_2 \in \mathbb{C}, x_3 > 0\}$ на себя, совпадающих с заданными при $x_3 = 0$. Продолженную группу, которая будет разрывна в $\bar{E}_3^+ \setminus f_\mu(|z| = 1)$, обозначим также через G^μ .

Введем в E_3^+ гиперболическую метрику Пуанкаре

$$ds^2 = x_3^{-2} (dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2) \quad (1)$$

и рассмотрим гармонические в этой метрике функции $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$, т. е. решения уравнения $\Delta u = 0$, где Δ — оператор Бельтрами — Лапласа

для метрики (1), которое, как известно, имеет вид

$$\Delta u = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} - \frac{1}{x_3} \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0. \quad (2)$$

Эти гармонические функции представляются в E_3^+ через свои граничные значения $h(y)$ по формуле Пуассона

$$u(x) = \frac{1}{\pi} \int_G \frac{x_3^2}{|x-y|^4} h(y) dy, \quad y = (y_1, y_2, 0). \quad (3)$$

Взяв $h(y) = h_\mu(y)$, где $h_\mu(y) = 1$ для $y \in D_{1\mu}$, $h_\mu(y) = 0$ для $y \in D_{2\mu}$, в силу свойств решений уравнения (2) получим, что соответствующая гармоническая функция

$$u_\mu(x) = \frac{1}{\pi} \int_{D_{1\mu}} \frac{x_3^2 dy}{|x-y|^4} = \frac{1}{\pi} \int_{D_{1\mu}} \frac{x_3^2 y_1 dy_2}{[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^2} \quad (3')$$

автоморфна относительно группы G^μ , т. е. $u_\mu(g(x)) = u_\mu(x)$ для всех $g \in G^\mu$.

Введя в векторном пространстве решений уравнения (2) скалярное произведение по формуле

$$(u, v) = \int_G u(y) v(y) dy + \sum_{j=1}^3 \int_{E_3^+} \sigma(x_3) \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} \frac{\partial v(x)}{\partial x_j} dx,$$

где $\sigma(x_3) = x_3^\alpha / (x_3 + 1)^\alpha$, $\alpha > 3$, получим гильбертово пространство. Обозначив его через $W_{2;\sigma}^1$, будем иметь

$$\|u\|_{W_{2;\sigma}^1} = \sqrt{(u, u)} \geq \|h\|_{L_2(G)}.$$

При $\|h\|_{L_2(G)} \leq a < \infty$ из (3) имеем также

$$\|u\|_{W_{2;\sigma}^1} \leq \eta_1(a, a) \|h\|_{L_2(G)}, \quad (4)$$

откуда $\|u_\mu\|_{W_{2;\sigma}^1} \leq \eta_2(a)$, где постоянная $\eta_1(a, a)$ зависит только от a и a , а $\eta_2(a)$ — от a .

3. Теорема 1. *Отображение $\tau: \{f_\mu, z\} \rightarrow u_\mu(x)$ является гомеоморфизмом пространства $T(G)$ на ограниченную область D_m , лежащую на $2m$ -мерной поверхности в пространстве $W_{2;\sigma}^1$, звездную относительно точки $u(x) = 0$.*

Приведем схему доказательства этой теоремы. На основании свойств функций $f_\mu(z)$ и свойств интеграла (3') заключаем, что отображение τ взаимно однозначно. Далее, если $\varphi_0 = \{f_0, z\}$, $\varphi = \{f, z\} \in T(G)$ и $\|\varphi - \varphi_0\|_{B(U, G)} < \varepsilon$, где ε достаточно мало, то аналогично ⁽¹⁾, используя теорему Альфорса — Берса (см. ^(1, 2)) о квазиконформном продолжении конформных отображений и свойства абстрактных голоморфных функций, получим, что существуют квазиконформные гомеоморфизмы $f_{\mu_0}(z)$ и $f_\mu(z)$ такие, что $f_{\mu_0}(z) = f_0(z)$ и $f_\mu(z) = f(z)$ при $z \in \bar{U}$, причем $\|\mu - \mu_0\|_\infty < \eta_3(\varepsilon, \varphi_0) \|\varphi - \varphi_0\|_{B(U, G)}$. Отсюда для плоской лебеговской меры симметрической разности $D_{1\mu_0} \Delta D_{1\mu}$ областей $D_{1\mu_0}$ и $D_{1\mu}$ получаем оценку

$$m(D_{1\mu_0} \Delta D_{1\mu}) < \eta_4(\varepsilon, \varphi_0) \|\varphi - \varphi_0\|_{B(U, G)},$$

что вместе с (4) дает непрерывность τ в точке φ_0 . Непрерывность обратного отображения τ^{-1} следует из конечномерности пространства $B(U, G)$.

Следовательно, τ — гомеоморфизм. Звездность области $D_m = \tau(T(G))$ относительно точки $u = 0$ непосредственно вытекает из свойств функций $u_n(x)$.

4. Переходя к рассмотрению граничных свойств гомеоморфизма τ , заметим, что в силу результатов ^(5, 6) точкам $\varphi_0 = \{f_0, z\}$ границы $\partial T(G)$ пространства $T(G)$ соответствуют клейновы группы $G_0 = f_0 G f_0^{-1}$ мёбиусовых преобразований $f_0 \circ g \circ f_0^{-1}$, $g \in G$, с одной инвариантной односвязной компонентой $D_{2,0} = f_0(U)$ (т. е. $g_0(D_{2,0}) = D_{2,0}$ для всех $g_0 \in G_0$) и эти группы G_0 могут быть только следующих двух видов: вырожденные, когда множество разрывности группы G_0 совпадает с $D_{2,0}$, и параболические группы, имеющие наряду с $D_{2,0}$ неинвариантные (относительно всей G_0) компоненты и содержащие параболические преобразования g_0 , которым в G соответствуют гиперболические преобразования $g = f_0^{-1} \circ g_0 \circ f_0$.

Сопоставим граничной группе G_0 , соответствующей точке $\varphi_0 = \{f_0, z\} \in \partial T(G)$, функцию $\tau(\varphi_0) = u_0(x) \in W_{2;\sigma}^2$, построенную по формуле (3) с $h(y) = h_0(y)$, где $h_0(y) = 0$ при $y \in f_0(U)$ и $h_0(y) = 1$ при $y \in \mathbb{C} \setminus f_0(U)$. Будем считать теперь, что исходная фуксова группа G имеет компактную фундаментальную область (а, следовательно, U/G — замкнутая риманова поверхность).

Теорема 2. Если граничная группа G_0 , соответствующая точке $\varphi_0 \in \partial T(G)$, такова, что предельное множество группы G_0 имеет нулевую двумерную лебеговскую меру, то отображение τ непрерывно в точке φ_0 . Если при этом G_0 — параболическая группа, то τ еще и однозначно непрерывно обратно в точке $\tau(\varphi_0)$.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма. Пусть G_0 — параболическая группа, соответствующая граничной точке $\varphi_0 = \{f_0, z\} \in \partial T(G)$.

Тогда каждая неинвариантная компонента Δ группы G_0 является ядром (в смысле Каратеодори) относительно любой своей точки w_0 для всякой последовательности областей $D_{1,n} = \{f_n(|z| < 1)\}$ таких, что соответствующие $\varphi_n = \{f_n, z\} \in T(G)$, $n = 1, 2, \dots$, сходятся к φ_0 в $B(U, G)$.

Относительно теоремы 2 следует заметить, что пока не установлено, какова плоская мера (равная нулю или положительна) предельных множеств граничных клейновых групп $G_0 \in \partial T(G)$, и в этом смысле теорема 2 имеет условный характер. Имеется гипотеза Л. Альфорса ⁽⁷⁾, что для всякой конечно-порожденной клейновой группы конформных автоморфизмов S плоская мера множества ее предельных точек равна нулю.

Отметим, что доказательство непрерывности отображения τ в граничных точках $\varphi_0 = \{f_0, z\} \in \partial T(G)$ основано на получении для последовательностей $\varphi_n = \{f_n, z\} \rightarrow \varphi_0$, $\varphi_p \in T(G)$, равенства $m f_0(K_r) = \lim_{n \rightarrow \infty} m f_n(K_r)$, где K_r — кольцо $1 < |z| < r$, $r < \infty$.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
10 I 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Альфорс, Лекции по квазиконформным отображениям, М., 1969. ² L. Bers, On Moduli of Riemann Surfaces, Zürich, 1964. ³ H. Poincaré, Acta Math., 3, 49 (1883). ⁴ С. Л. Крушкаль, Сибирск. матем. журн., 10, № 3, 573 (1969). ⁵ L. Bers, Ann. Math., 91, № 3, 570 (1970). ⁶ B. Maskit, Ann. Math., 91, № 3, 607 (1970). ⁷ L. V. Ahlfors, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 55, № 2, 251 (1966).