

УДК 517.56

МАТЕМАТИКА

О. Б. СИДОНСКИЙ

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком Н. Н. Яненко 17 I 1972)

Выводятся соотношения в частных разностях для функций Лежандра, Аппеля и Лауричеллы. Эти соотношения принадлежат классу разностных уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Рассмотрим произведение функций

$$\Phi = \Phi(z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \prod_{m=1}^n F_m(z, \alpha_m),$$

удовлетворяющих дифференциально-разностному функциональному уравнению

$$(D_z - c_m T_{\alpha_m}^{\lambda_m, \mu_m}) F_m(z, \alpha_m) = 0, \quad D_z \equiv \partial/\partial z, \quad (1)$$

где разностный оператор T имеет вид

$$T_{\alpha}^{\lambda, \mu} = \Delta_{\alpha}^{\lambda} \nabla_{\alpha}^{\mu}, \quad \Delta_{\alpha} = E_{\alpha} - I, \quad \nabla_{\alpha} = I - E_{\alpha}^{-1},$$

а E и I — оператор сдвига и единичный оператор соответственно. Следствием (1) для произведения Φ является соотношение

$$\left(D_z - \sum_{m=1}^n c_m T_{\alpha_m}^{\lambda_m, \mu_m} \right) \Phi = 0. \quad (2)$$

Пусть оператор L_z^s удовлетворяет равенству

$$L_z^s D_z \Psi(z) = s L_z^s \Psi(z); \quad (3)$$

подействуем этим оператором на выражение (2). Для функции параметра s

$$P = P(s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = L_z^s \Phi(z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$$

получим соотношение

$$\left(sI - \sum_{m=1}^n c_m T_{\alpha_m}^{\lambda_m, \mu_m} \right) P = 0. \quad (4)$$

2. Выберем в качестве L_z^s оператор, осуществляющий интегральное преобразование

$$L_z^s \Psi(z) = \int_0^{\infty} e^{-sz} \Psi(z) dz, \quad (5)$$

предполагая, что для функции $\Psi(z)$ интеграл (5) сходится и имеет место равенство

$$\lim_{z \rightarrow +0} \Psi(z) = 0.$$

Свойство (3) для оператора L_z^s из (5) является следствием теоремы о дифференцировании оригинала, известной для преобразования Лапласа.

Положим

$$F_1(z, \alpha_1) = e^{-z} z^{\alpha_1-1} / \Gamma(\alpha_1) \quad (6)$$

($c_1 = -1$, $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 1$) и при $m > 1$ функции $F_m(z, \alpha_m)$ будем выбирать равными функциям $F^{(1)}(z, \alpha_m)$ и (или) $F^{(2)}(z, \alpha_m)$, которые связаны с цилиндрическими функциями от мнимого аргумента

$$F^{(1)}(z, \alpha) = e^{-az} I_\alpha(az), \quad F^{(2)}(z, \alpha) = e^{-az - i\pi\alpha} K_\alpha(az). \quad (7)$$

Для этих функций уравнение (1) ($c_m = 1/2\alpha_m$, $\lambda_m = \mu_m = 1$) выводится из известных рекуррентных соотношений для модифицированных функций Бесселя $I_\alpha(z)$ или функций Макдональда $K_\alpha(z)$ (¹).

Введем функцию H :

$$H = H(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = r^{-\alpha_1} P(s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad r = (s+1)^{-1},$$

для которой выражение (4) можно записать в форме

$$RH = 0, \quad (8)$$

где R — разностный оператор вида

$$R = \nabla_{\alpha_1} - r \sum_{m=2}^n c_m \Delta_{\alpha_m} \nabla_{\alpha_m}, \quad (9)$$

если функции $F_m(z, \alpha_m)$ выбраны в соответствии с (6), (7). Оператор R представляет разностный аналог дифференциального оператора

$$L = \frac{\partial}{\partial t} - \sum_{m=2}^n b_m \frac{\partial^2}{\partial x_m^2}.$$

3. Приведем функцию H к гипергеометрическим функциям. Преобразование Лапласа произведения цилиндрической функции от мнимого аргумента на степенную выражается через функции Лежандра первого или второго рода (²). Полагая при $n = 2$ функцию $F_2(z, \alpha_2)$ равной $F^{(1)}(z, \alpha_2)$ из (7), получим

$$H = H^{(1)}(r, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)} (1 + 2\alpha_2 r)^{-\alpha_1/2} \mathfrak{Z}_{\alpha_1-1}^{-\alpha_2}(\mathfrak{U}) \quad (10a)$$

или при $F_2(z, \alpha_2) = F^{(2)}(z, \alpha_2)$

$$H = H^{(2)}(r, \alpha_1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)} (1 + 2\alpha_2 r)^{-\alpha_1/2} \mathfrak{D}_{\alpha_1-1}^{-\alpha_2}(\mathfrak{U}), \quad (10b)$$

где

$$\mathfrak{U} = \frac{1 + \alpha_2 r}{\sqrt{1 + 2\alpha_2 r}}, \quad |1 + 2\alpha_2 r| > 1.$$

Уравнение (8) с разностным оператором (9) является функциональным соотношением для функций (10).

Для частного случая функции (10a) с целочисленным параметром α_2 это уравнение содержится в рекуррентном соотношении, выведенном Н. Я. Вилениным для функций $\mathfrak{Z}_{mn}(ch\tau)$, связанных с матричными элементами представлений $T_\chi(g)$ группы $QU(2)$ (³).

Положим $F_m(z, \alpha_m) = F^{(1)}(z, \alpha_m)$ при всех $m > 1$. Тогда функцию H можно привести к обобщенной гипергеометрической функции F_A Лауричеллы ($\text{Re } s > -1$):

$$H(r, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) = \frac{\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha_1)} \prod_{m=2}^n \frac{(1/2 \alpha_m r)^{\alpha_m}}{\Gamma(\alpha_m + 1)} F_A \left(\alpha, \alpha_2 + \frac{1}{2}, \alpha_3 + \frac{1}{2}, \dots, \alpha_n + \frac{1}{2}, 2\alpha_2 + 1, 2\alpha_3 + 1, \dots, 2\alpha_n + 1, -2\alpha_2 r, -2\alpha_3 r, \dots, -2\alpha_n r \right), \quad (11)$$

$$\alpha = \sum_{m=1}^n \alpha_m,$$

в соответствии с интегралом от произведения функций Бесселя, степенной и показательной функции ⁽⁴⁾. При $n = 3$ функция F_A в (11) совпадает с функцией Аппеля второго рода.

4. Разностный оператор R содержит в качестве слагаемого единичный оператор I с множителем

$$1 + 2r \sum_{m=2}^n c_m.$$

При некотором значении числа $r = \hat{r}$ этот множитель обращается в нуль. Естественно назвать оператор R в таком случае вырожденным.

Вырождение разностного оператора R в соотношении (8) влечет приводимость гипергеометрической функции в выражении (11) для функции H . При $n = 2$ эта функция приводится к бета-функции Эйлера, при $n = 3$ функция H записывается через гипергеометрическую функцию Гаусса общего вида ($a_2 \leq a_3$):

$$H(\hat{r}, a_1, a_2, a_3) = \frac{2^{a_1-1} e^{i\pi(a_2-a_1)} \Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\Gamma(a_1) \Gamma(a_2+1) \Gamma\left(a_3 - \frac{a}{2} + 1\right)} \left(1 + \frac{a_2}{a_3}\right)^{a_1} \left(\frac{a_2}{a_3}\right)^{a_2} \times \\ \times {}_2F_1\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2} - a_3, a_2 + 1, \frac{a_2^2}{a_3^2}\right), \quad (a_2 + a_3) \hat{r} = e^{i\pi},$$

вместо параметрически частного случая функции Аппеля F_2 в (11), а при $n = 4$ выражается через функцию Аппеля четвертого рода.

Вывод равенства (12) основывается на применении квадратичного преобразования Бейли ⁽⁵⁾ к функции F_2 в (11) и использовании формулы аналитического продолжения для функции Аппеля F_4 ⁽⁶⁾. При $a_2 = a_3$ гипергеометрическая функция Гаусса единичного аргумента в (12) может быть записана в виде отношения произведений гамма-функций Эйлера ⁽²⁾ и функция H приводится к произведению эйлеровых интегралов первого рода

$$H(\hat{r}, a_1, a_2, a_3) = 2^{2a_1-1} e^{1/2 i\pi(a_2+a_3-a_1)} \frac{\sin \pi \frac{a_1+a_2-a_3}{2} \sin \pi \frac{a_1-a_2+a_3}{2}}{\pi^2 \sin \pi a_1} \times \\ \times B\left(\frac{a_1+a_2+a_3}{2}, \frac{a_1-a_2-a_3}{2}\right) B\left(\frac{a_1+a_2-a_3}{2}, \frac{a_1-a_2+a_3}{2}\right), \\ \operatorname{Re}(1 - a_1) > 0.$$

Автор выражает искреннюю признательность Н. Я. Виленкину за обсуждение работы.

Научно-исследовательский институт
прикладной математики и механики
Томского государственного университета
им. В. В. Куйбышева

Поступило
31 XII 1971

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 2, «Наука», 1966, стр. 91. ² А. Кратцер, В. Франц, Трансцендентные функции, ИЛ, 1963. ³ Н. Я. Виленкин, Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965, стр. 330. ⁴ Г. Бейтман, А. Эрдейи, Таблицы интегральных преобразований, 1, «Наука», 1969, стр. 167. ⁵ W. N. Bailey, Quart. J. Math., 4, № 15, 237 (1953). ⁶ Г. Бейтман, А. Эрдейи, Высшие трансцендентные функции, 1, «Наука», 1965, стр. 233.