Доклады Академии наук СССР
1972. Том 204, № 6

УДК 517.946 *МАТЕМАТИКА*

Член-корреспондент АН СССР А. В. БИЦАДЗЕ, А. М. НАХУШЕВ

К ТЕОРИИ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В МНОГОМЕРНЫХ ОБЛАСТЯХ

В эвклидовом пространстве E_{n+1} точек $(x, x_0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, x_0)$ рассмотрим уравнение

$$x_0^{2m} \Delta_x u - x_0 u_{x_0x_0} + (m - {}^1/_2) u_{x_0} = 0, \qquad (1)$$

где m — неотрицательное целое число, Δ_x — оператор Лапласа по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$, а $u(x, x_0)$ — искомое решение.

Уравнение (1) при $n = 1$ относится к классу уравнений, подробно исследованных в работе ([1]).

Обозначим через H конечную односвязную область пространства E_{n+1}, ограниченную плоскостью $x_0 = 0$ и характеристическим коноидом K: $|x| = r - \beta x_0^{1/\beta}$, $x_0 \geqslant 0$, где $|x|$ — длина вектора x, $r = \mathrm{const} > 0$, $(2m + 1)\beta = 2$.

Пусть $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ — фиксированный отличный от нуля вектор из шара $|x| < r$ эвклидова пространства E_n, $H_\alpha{}^r$ — подобласть области H, ограниченная коноидами K и $\tilde{K}$: $|x - \alpha| = \beta x_0^{1/\beta}$, K^r и K_α части K и $\tilde{K}$, составляющих границу области $H_\alpha{}^r$, $A = \|a_{jk}\|$ — квадратная $(n \times n)$-матрица, транспонированная по отношению к ортогональной матрице $A' = \|a_{kj}\|$, $a_{ij} = \alpha_j / |\alpha|$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $\det A' = 1$, A_i — матрица, полученная из матрицы A заменой элементов i-го ее столбца нулями.

Введем операторы

$$S_t^\alpha u \equiv \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u \left[\frac{r \xi_i \alpha}{|\alpha| \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i \xi, \left(\frac{r}{2\beta} - \frac{|\alpha| \xi_i}{\beta \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} \right)^\beta \right] d\omega_\xi,$$

$$S_t^0 u \equiv \gamma(n) \int\limits_{|\xi|=t} u \left[\xi, \left(\frac{r}{2\beta} \right)^\beta \right] d\omega_\xi,$$

$$B_n^\alpha u \equiv \begin{cases} R \left(\dfrac{\partial}{\partial R^2} \right)^{(n-1)/2} \dfrac{1}{R} S_R^\alpha u, & n \equiv 1 \pmod 2, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\dfrac{\partial}{\partial R^2} \right)^{n/2} \displaystyle\int_0^R \dfrac{S_t^\alpha u}{\sqrt{R^2 - t^2}}\, dt, & n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

Здесь и ниже $d\omega_\xi$ — элемент сферы $|\xi| = t$ пространства E_n,

$$\gamma(n) = \sqrt{\pi^{1-n}}, \quad 2R = \sqrt{r^2 - |\alpha|^2}, \quad \frac{\partial}{\partial R^2} = \frac{1}{2R} \frac{\partial}{\partial R}.$$

Очевидно, что эти операторы не зависят от индекса $i = 1, 2, \ldots, n$.

Справедливо

Утверждение. *Для любого регулярного в области H решения $u(x, x_0)$ уравнения* (1), *непрерывного в $\bar{H}$, имеет место равенство*

$$u(\alpha, 0) + u[0, (r/\beta)^\beta] = B_n{}^\alpha u \quad \forall \alpha, |\alpha| < r. \qquad (2)$$

Действительно, предположим сначала, что u_{x_j}, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $x_0^{1/2 - m} u_{x_0}$ непрерывны в $\bar{H}$. Непосредственным вычислением нетрудно убедиться, что преобразование

$$z_0 = \frac{ry_0 + |\alpha| y_i}{2R} - \frac{r^2 + |\alpha|^2}{4R} \Leftrightarrow y_0 = \frac{rz_0 - |\alpha| z_i}{2R} + \frac{r}{2},$$

$$z_i = \frac{|\alpha| y_0 + ry_i}{2R} - \frac{r|\alpha|}{2R} \Leftrightarrow y_i = \frac{rz_i - |\alpha| z_0}{2R} + \frac{|\alpha|}{2},$$

$$z_k = y_k, \quad k = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n,$$

где

$$y_0 = \beta x_0^{1/\beta}, \quad y = A'x \Leftrightarrow x = Ay = \alpha y_i / |\alpha| + A_i y,$$

отображает область $H_\alpha{}^r$ на область Q пространства E_{n+1} независимых переменных $z_0, z_1, \ldots, z_n$, ограниченную конусами $|z| = R - z_0$ и $|z| = R + z_0$, причем точкам $(0, (r/\beta)^\beta)$ и $(\alpha, 0)$ сопоставляются точки $(0, R)$ и $(0, -R)$, а поверхности

$$2\beta r x_0^{1/\beta} + 2\alpha x = r^2 + |\alpha|^2 \tag{3}$$

— плоскость $z_0 = 0$.

В переменных z_0, z функция

$$v(z, z_0) = u\left[\frac{\alpha}{|\alpha|}\frac{rz_i - |\alpha| z_0}{\sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{\alpha}{2} + A_i z, \ \left(\frac{rz_0 - |\alpha| z_i}{\beta\sqrt{r^2 - |\alpha|^2}} + \frac{r}{2\beta}\right)^\beta\right] \tag{4}$$

является решением уравнения

$$v_{z_0 z_0} - \Delta_z v = 0. \tag{5}$$

Из однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (5) с начальными данными $v(z, 0)$, $v_{z_0}(z, 0) = v_{z_0}(z, z_0)|_{z_0=0}$, $|z| \leqslant R$, следует, что функция $v(z, z_0)$ в области Q представима в виде ([2])

$$v(z, \pm z_0) = \frac{\gamma(n)}{2} z_0 \left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-1)/2} \frac{1}{z_0} \int\limits_{|\xi|=z_0} v(z+\xi, 0)\, d\omega_\xi \pm$$

$$\pm \frac{\gamma(n)}{4}\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{1}{z_0} \int\limits_{|\xi|=z_0} v_{z_0}(z+\xi, 0)\, d\omega_\xi, \quad n \equiv 1 \pmod 2, \tag{6}$$

$$v(z, \pm z_0) = \frac{\gamma(n)}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{n/2} \int\limits_0^{z_0} \frac{dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int\limits_{|\xi|=t} v(z+\xi, 0)\, d\omega_\xi \pm$$

$$\pm \frac{\gamma(n) z_0}{2\sqrt{\pi}}\left(\frac{\partial}{\partial z_0^2}\right)^{(n-2)/2} z_0^{n-3} \int\limits_0^{z_0} \frac{t^{2-n}\,dt}{\sqrt{z_0^2 - t^2}} \int\limits_{|\xi|=t} v_{z_0}(z+\xi, 0)\, d\omega_\xi,$$

$$n \equiv 0 \pmod 2. \tag{7}$$

Поскольку $u(\alpha, 0) + u[0, (r/\beta)^\beta] = v(0, -R) + v(0, R)$, то из (6) и (7), в силу (4), при $z = 0$, $z_0 = R$ и $\alpha \neq 0$ получаем (2). При $\alpha = 0$ формула (2) также вытекает из (6) и (7), где на этот раз

$$v(z, z_0) = u\left[z, \left(\frac{2z_0 + r}{2\beta}\right)^\beta\right], \quad z = x, \quad z_0 = y_0 - r/2.$$

Принимая теперь во внимание, что соотношения (6) и (7) имеют место для всех положительных $z_0 < R$, простым предельным переходом можно показать справедливость равенства (2) и для регулярных решений $u(x, x_0)$ из класса $C(\overline{H})$.

Обозначим через $H(\alpha, r)$ часть поверхности (3), принадлежащую H, а через $K(\alpha, r) = K_\alpha \cap K^r$.

В операторе B_n^α при $n \equiv 1 \pmod 2$ участвуют значения функции $u(x, x_0)$ лишь на $K(\alpha, r)$. В случае же $n \equiv 0 \pmod 2$ в выражении оператора B_n^α участвуют значения функции $u(x, x_0)$ на $H(\alpha, r)$. На этот раз пользуясь свойством функции Вольтерра ([3]) $V(x, y_0; \xi, \xi_0)$ для волнового уравнения $\Box u \equiv u_{y_0 y_0} - \Delta_x u$, легко вычислить, что

$$G_n^\alpha u \equiv B_n^\alpha u - u\,[0, (r/\beta)^\beta] = \lim_{y_0 \to 0} \frac{\partial}{\partial y_0} \int_{K_\alpha^r} \Big\{ u\,[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta] \frac{\partial}{\partial N} V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) - V(\alpha, y_0; \xi, \xi_0) \frac{\partial}{\partial N} u\,[\xi, (\xi_0/\beta)^\beta] \Big\}\, dK_\alpha^r, \qquad (8)$$

где K_α^r — образ K^r при отображении $y_0 = \beta x_0^{1/\beta}$, $x = x$, N — конормаль, соответствующая оператору $\Box$, dK_α^r — элемент поверхности K_α^r.

Из (8) видно, что в выражении оператора G_n^α участвуют значения $u(x, x_0)$ только на коноиде K^r.

Заметим, что при $n = 2$

$$2\pi V(x, y_0, \xi, \xi_0) = \log\,[\,(\xi_0 - y_0 + \sqrt{|\xi_0 - y_0|^2 - |x - \xi|^2}\,) \,/\, |x - \xi|\,].$$

Свойство (2) всех решений уравнения (1) позволяет отыскать ряд корректных задач для уравнения (1) в области H. Здесь мы ограничимся постановкой одной простой краевой задачи в случае, когда $1 < n \equiv \equiv 1 \pmod 2$.

Задача 1. Найти регулярное в области H решение $u(x, x_0)$ уравнения (1), непрерывное в $\bar{H}$ и удовлетворяющее условиям

$$\lim x_0^{1/2 - m} u_{x_0} = \nu(x) \quad \forall x, |x| < r, \qquad (9)$$

$$B_n^\alpha u = \psi(x) \quad \forall x, |x| < r, \qquad (10)$$

где

$$\nu(x) \in C^{(n+1)/2}(|x| \leqslant r), \quad \psi(x) \in C^{(n+3)/2}(|x| \leqslant r).$$

Единственность и существование решения этой задачи легко получить из равенства (2) и однозначной разрешимости видоизмененной (по терминологии работы ([4])) задачи Коши:

$$\lim_{x_0 \to 0} u(x, x_0) = \tau(x), \quad \lim_{x_0 \to 0} x_0^{1/2 - m} u_{x_0} = \nu(x), \quad |x| < r,$$

для уравнения (1), если учесть, что на основании (9), (10) и принципа Гюйгенса

$$u(0, (r/\beta)^\beta) = \frac{\gamma(n)}{4} r \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-1)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi| = r} \psi(z + \xi, 0)\, d\omega_\xi + \frac{\gamma(n)}{8} \left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^{(n-3)/2} \frac{1}{r} \int_{|\xi| = r} \nu(z + \xi, 0)\, d\omega_\xi.$$

Математический институт им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР
Москва

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
2 III 1972

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. В. Бицадзе, Сборн. тр., посвященных восьмидесятилетию Н. И. Мусхелишвили, «Наука», 1972. [2] Р. Курант, Уравнения с частными производными, М., 1964. [3] Э. Гурса, Курс математического анализа, 3, М.—Л., 1939. [4] А. В. Бицадзе, Тр. III Всесоюзн. математич. съезда, 3, Изд. АН СССР, 1958.