

СМЕЖНЫЕ КЛАССЫ, ЯВЛЯЮЩИЕСЯ ПОЛИАДИЧЕСКИМИ ПОДГРУППАМИ

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, Могилёв

COSETS THAT ARE POLYADIC SUBGROUPS

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, Mogilev

Аннотация. В статье изучаются полиадические группы, в которых смежные классы по полуинвариантной n -арной подгруппе могут быть n -арными подгруппами.

Ключевые слова: l -арная группа, полуинвариантная l -арная подгруппа, смежный класс, конгруэнция.

Для цитирования: Гальмак, А.М. Смежные классы, являющиеся полиадическими подгруппами / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2025. – № 2 (63). – С. 44–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44. – EDN: PHKJNB

Abstract. The article studies polyadic groups in which cosets of a semi-invariant n -ary subgroup can be n -ary subgroups.

Keywords: l -ary group, semi-invariant l -ary subgroup, coset, congruence.

For citation: Gal'mak, A.M. Cosets that are polyadic subgroups / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2025. – № 2 (63). – P. 44–50. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2025_2_63_44 (in Russian). – EDN: PHKJNB

Введение

Известно, что в n -арных группах при $n \geq 3$, в отличие от групп, смежный класс n -арной факторгруппы, отличный от определяющей её полуинвариантной n -арной подгруппы, может быть n -арной подгруппой. В качестве тривиального примера можно указать n -арную факторгруппу идемпотентой n -арной группы по полуинвариантной n -арной подгруппе с единственным элементом. В этом случае множество всех смежных классов указанной n -арной факторгруппы совпадает с множеством всех одноэлементных подмножеств n -арной группы, то есть совпадает с множеством всех классов тривиальной конгруэнции. Ещё одним примером может служить n -арная группа нечётной арности, производная от симметрической группы, в которой множество всех нечётных подстановок, рассматриваемое как смежный класс n -арной факторгруппы n -арной симметрической группы по полуинвариантной n -арной знакопеременной группе, является n -арной подгруппой. Именно изучению смежных классов, являющихся n -арными подгруппами, посвящена настоящая статья.

1 Предварительные сведения

Напомним, что l -арную подгруппу $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называют [1, с. 52] *инвариантной* в ней, если

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{Bx B \dots B}_{l-2}) = \dots \\ \dots = \eta(\underbrace{B \dots B x B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B x}_{l-1})$$

для любого $x \in A$. Если же

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B x}_{l-1})$$

для любого $x \in A$, то $\langle B, \eta \rangle$ называют [1, с. 55] *полуинвариантной* в $\langle A, \eta \rangle$.

Полуинвариантные и инвариантные полиадические подгруппы впервые появились у В. Дёрнте в [2].

При $l = 2$ понятия полуинвариантности и инвариантности совпадают, так как определяющие их равенства принимают вид $xB = Bx$.

Понятия полуинвариантной l -арной подгруппы и инвариантной l -арной подгруппы являются частными случаями более общего понятия из следующего определения.

Определение 1.1 [3, 4] l -Арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, где $l = s(n-1) + 1$, $s \geq 1$, называется *n -полуинвариантной* в ней, если

$$\eta(x \underbrace{B \dots B}_{l-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{i(n-1)} x \underbrace{B \dots B}_{(s-i)(n-1)})$$

для любого $x \in A$ и любого $i = 1, \dots, s$.

В развёрнутом виде последнее равенство переписывается следующим образом

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{x B \dots B}_{l-1}) &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x \underbrace{B \dots B}_{(s-1)(n-1)}) = \dots \\ &= \eta(\underbrace{B \dots B}_{(s-1)(n-1)} x \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x). \end{aligned}$$

Ясно, что l -полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы – это в точности её полуинвариантные l -арные подгруппы, а 2-полуинвариантные l -арные подгруппы l -арной группы – это в точности её инвариантные l -арные подгруппы.

Из определения 1.1 также следует, что всякая n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы является и полуинвариантной в ней. В частности, полуинвариантными являются инвариантные l -арные подгруппы.

Ясно, что если $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то $\langle B, \mu \rangle$ – l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A, \mu \rangle$.

Примеры n -полуинвариантных l -арных подгрупп можно строить с помощью следующей леммы, справедливость которой устанавливается простой проверкой.

Лемма 1.1. Если $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то $\langle B, \mu \rangle$ – n -полуинвариантная l -арная подгруппа l -арной группы $\langle A, \mu \rangle$.

Для всякой полуинвариантной n -арной подгруппы $\langle B, \eta \rangle$ n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ множество

$$A/B = \{\eta(\underbrace{a B \dots B}_{n-1}) \mid a \in A\} = \{\eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} a) \mid a \in A\}$$

всех смежных классов $\langle A, \eta \rangle$ по $\langle B, \eta \rangle$ является n -арной группой относительно n -арной операции η . Эту n -арную группу называют [1, с. 59] n -арной факторгруппой и обозначают символом $\langle A/B, \eta \rangle$.

Согласно предложению 7.4 [4], всякая полуинвариантная n -арная подгруппа $\langle B, \eta \rangle$ n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ определяет на ней конгруэнцию ρ_B , классы которой совпадают со смежными классами $\langle A, \eta \rangle$ по $\langle B, \eta \rangle$, что означает совпадение n -арных факторгрупп $\langle A/\rho_B, \eta \rangle$ и $\langle A/B, \eta \rangle$.

Замечание 1.1. В теории n -арных групп, также как и в теории групп, n -арную операцию в n -арной группе $\langle A, \eta \rangle$ и n -арную операцию в её n -арной факторгруппе по полуинвариантной n -арной подгруппе $\langle B, \eta \rangle$ обозначают одним и тем же символом η , то есть для обозначения указанной n -арной факторгруппы используют запись $\langle A/B, \eta \rangle$. На самом деле речь идёт о разных n -арных операциях.

Если n -арную операцию в n -арной факторгруппе n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ по её полуинвариантной n -арной подгруппе $\langle B, \eta \rangle$ обозначить

символом $\eta_{A/B}$, то согласно определению этой операции,

$$\begin{aligned} \eta_{A/B}(\eta(\underbrace{a_1 B \dots B}_{n-1}) \eta(\underbrace{a_2 B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(\underbrace{a_n B \dots B}_{n-1})) &= \\ &= \eta(\eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{n-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

С другой стороны, для любых подмножеств $B_1, B_2, \dots, B_n$ множества A полагают

$$\eta(B_1 \dots B_n) = \{\eta(b_1 \dots b_n) \mid b_1 \in B_1, \dots, b_n \in B_n\}.$$

Используя это равенство, ассоциативность n -арной операции η , полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ и равенство

$$B = \eta(\underbrace{B \dots B}_n),$$

можно убедиться в справедливости следующего равенства

$$\begin{aligned} \eta(\eta(\underbrace{a_1 B \dots B}_{n-1}) \eta(\underbrace{a_2 B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(\underbrace{a_n B \dots B}_{n-1})) &= \\ &= \eta(\eta(\underbrace{a_1 a_2 \dots a_n}_{n-1}) \underbrace{B \dots B}_{n-1}). \end{aligned}$$

Таким образом, верно равенство

$$\begin{aligned} \eta_{A/B}(\eta(\underbrace{a_1 B \dots B}_{n-1}) \eta(\underbrace{a_2 B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(\underbrace{a_n B \dots B}_{n-1})) &= \\ &= \eta(\eta(\underbrace{a_1 B \dots B}_{n-1}) \eta(\underbrace{a_2 B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(\underbrace{a_n B \dots B}_{n-1})). \end{aligned}$$

Именно это равенство позволяет не различать n -арные операции η и $\eta_{A/B}$ и использовать для их обозначения один и тот же символ η . Указанное равенство используется при работе со смежными классами n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta_{A/B} \rangle$. При этом, не смотря на отождествление символов η и $\eta_{A/B}$, из контекста всегда понятно о какой из операций, η или $\eta_{A/B}$, в каждом конкретном случае идёт речь.

Согласно Посту [5], последовательности α и β элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называются эквивалентными в ней, если существуют последовательности γ и δ элементов этой же n -арной группы такие, что сумма длин последовательностей γ , α и δ сравнима с 1 по модулю $n-1$, и

$$\eta(\gamma\alpha\delta) = \eta(\gamma\beta\delta).$$

Пост доказал [5], что если последовательности α и β элементов n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ эквивалентны в ней, то

$$\eta(\rho\alpha\tau) = \eta(\rho\beta\tau)$$

для любых последовательностей ρ и τ элементов из A таких, что сумма длин последовательностей ρ , α и τ сравнима с 1 по модулю $n-1$.

2 Основной результат

В дальнейшем, если $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, то для сокращения записей будем использовать символ B_d для обозначения смежного класса

$$\eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} d),$$

то есть

$$B_d = \eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} d).$$

Замечание 2.1. Если $d \notin B$, то $B_d \neq B$, точнее, $B \cap B_d = \emptyset$.

Теорема 2.1. Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$; существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$

эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$ в смысле Поста. Тогда:

1) смежный класс B_d n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ замкнут относительно l -арной операции μ , а универсальная алгебра $\langle B_d, \mu \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A, \mu \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A, \mu \rangle$ l -арных подгрупп $\langle B_d, \mu \rangle$ и $\langle B, \mu \rangle$ l -арные факторгруппы $\langle A/B_d, \mu \rangle$ и $\langle A/B, \mu \rangle$ совпадают: $\langle A/B_d, \mu \rangle = \langle A/B, \mu \rangle$;

3) конгруэнции ρ_{B_d} и ρ_B l -арной группы $\langle A, \mu \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle B_d, \mu \rangle$ и $\langle B, \mu \rangle$ совпадают: $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Доказательство. 1) Пусть

$$h_1 = \eta(db_{11} \dots b_{1(n-1)}), \dots, h_l = \eta(db_{l1} \dots b_{l(n-1)}),$$

где $b_{11}, \dots, b_{1(n-1)}, \dots, b_{l1}, \dots, b_{l(n-1)} \in B$, произвольные элементы из B_d . Используя полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, будем иметь

$$\begin{aligned} \mu(h_1 \dots h_l) &= \eta(\eta(db_{11} \dots b_{1(n-1)}) \dots \eta(db_{l1} \dots b_{l(n-1)})) \in \\ &\in \eta(\underbrace{\eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{l-1}) = \\ &= \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{l(n-1)}) = \\ &= \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{\eta(\underbrace{B \dots B}_{(l-1)(n-1)+1}) \underbrace{B \dots B}_{n-2}}_{n-1}) = \\ &= \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}), \end{aligned}$$

то есть

$$\mu(h_1 \dots h_l) \in \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}).$$

А так как последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна в $\langle A, \eta \rangle$ последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, то

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{d \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{n-1}).$$

Из двух последних соотношений следует

$$\mu(h_1 \dots h_l) \in \underbrace{\eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1} = B_d,$$

что означает замкнутость множества B_d относительно l -арной операции μ .

Рассмотрим теперь в $\langle B_d, \mu \rangle$ уравнение

$$\mu(xh_2 \dots h_l) = g, \quad (2.1)$$

где

$$g = \eta(dc_1 \dots c_{n-1}) \in B_d, c_1, \dots, c_{n-1} \in B. \quad (2.2)$$

Элементы $h_2, \dots, h_l$ были определены выше и также принадлежат множеству B_d .

Так как $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, то уравнение (2.1) имеет в ней решение $x = a \in A$.

Подставив это решение в (2.1), получим равенство

$$\mu(ah_2 \dots h_l) = g.$$

откуда и из (2.2) следует

$$\mu(ah_2 \dots h_l) = \eta(dc_1 \dots c_{n-1}). \quad (2.3)$$

Проведя в левой части равенства (2.3) вычисления, аналогичные тем, что проводились при установлении замкнутости множества B_d относительно l -арной операции μ , получим

$$\mu(ah_2 \dots h_l) \in \underbrace{\eta(a \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1}.$$

Следовательно,

$$\mu(ah_2 \dots h_l) = \eta(ad_2 \dots d_n)$$

для некоторых $d_2, \dots, d_n \in B$, откуда и из (2.3) следует

$$\eta(ad_2 \dots d_n) = \eta(dc_1 \dots c_{n-1}). \quad (2.4)$$

Пусть β – обратная последовательность в $\langle B, \eta \rangle$ для последовательности $d_2 \dots d_n$. Так как $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа, $d_2, \dots, d_n \in B$, то последовательность β эквивалентна в смысле Поста в $\langle B, \eta \rangle$, а значит и в $\langle A, \eta \rangle$ некоторой последовательности $u_2 \dots u_n$, где $u_2, \dots, u_n \in B$. Так как следствием равенства (2.4) является равенство

$$\begin{aligned} \eta(\eta(ad_2 \dots d_n)u_2 \dots u_n) &= \\ \eta(\eta(dc_1 \dots c_{n-1})u_2 \dots u_n), \end{aligned}$$

то, учитывая нейтральность последовательности $d_2 \dots d_n u_2 \dots u_n$, а также то, что $c_1, \dots, c_{n-1}, u_2, \dots, u_n \in B$, получим

$$a \in \underbrace{\eta(d \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1} = B_d.$$

Следовательно, уравнение (2.1) разрешимо в $\langle B_d, \mu \rangle$.

Аналогично доказывается разрешимость в $\langle B_d, \mu \rangle$ уравнения

$$\mu(h_1 \dots h_{l-1}y) = g$$

для любых $h_1, \dots, h_{l-1}, g \in B_d$. Таким образом, согласно аксиоматике Поста для n -арных групп, $\langle B_d, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа в $\langle A, \eta \rangle$.

Применяя полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ и снова используя эквивалентность в $\langle A, \eta \rangle$ последовательностей $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$,

где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$, получим

$$\begin{aligned} \mu(\underbrace{x \underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1}}_{l-1}) &= \eta(\underbrace{x \underbrace{\eta(\underbrace{d \underbrace{B \dots B}_{n-1}) \dots \eta(\underbrace{d \underbrace{B \dots B}_{n-1})}_{n-1}}_{n-1}}_{l-1}) = \\ &= \eta(\underbrace{x \underbrace{B \dots B}_{(l-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{(l-1)(n-1)}}_{(l-1)(n-1)}) = \eta(\underbrace{x \underbrace{B \dots B}_{n-1}}_{n-1}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x) &= \eta(\underbrace{\eta(d B \dots B)}_{n-1} \dots \underbrace{\eta(d B \dots B)}_{n-1} x) = \\ &= \eta(\underbrace{d \dots d}_{l-1} \underbrace{B \dots B}_{(l-1)(n-1)} x) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x) \end{aligned}$$

для любого $x \in A$, то есть

$$\mu(\underbrace{x B_d \dots B_d}_{l-1}) = \eta(\underbrace{x B \dots B}_{n-1}), \quad (2.5)$$

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x). \quad (2.6)$$

В силу полуинвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, правые части последних двух равенств равны. Поэтому равны и их левые части:

$$\mu(\underbrace{x B_d \dots B_d}_{l-1}) = \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x).$$

Следовательно, $\langle B_d, \mu \rangle$ полуинвариантна в $\langle A, \mu \rangle$.

2) Так как

$$\eta(\underbrace{x B \dots B}_{n-1}) = \eta(\underbrace{x B \dots B}_{s(n-1)}) = \mu(\underbrace{x B \dots B}_{l-1}),$$

$$\eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{s(n-1)} x) = \mu(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x),$$

то из (2.5) и (2.6) вытекает

$$\mu(\underbrace{x B_d \dots B_d}_{l-1}) = \mu(\underbrace{x B \dots B}_{l-1}),$$

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x) = \mu(\underbrace{B \dots B}_{l-1} x),$$

откуда следует совпадение l -арных факторгрупп $\langle A/B_d, \mu \rangle$ и $\langle A/B, \mu \rangle$.

3) Так как конгруэнция ρ_B и полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle B, \mu \rangle$ определяют одну и ту же факторгруппу; аналогично конгруэнция ρ_{B_d} и полуинвариантная l -арная подгруппа $\langle B_d, \mu \rangle$ определяют одну и ту же l -арную факторгруппу:

$$\langle A/\rho_B, \mu \rangle = \langle A/B, \mu \rangle,$$

$$\langle A/\rho_{B_d}, \mu \rangle = \langle A/B_d, \mu \rangle,$$

то, согласно 2),

$$\langle A/\rho_{B_d}, \mu \rangle = \langle A/\rho_B, \mu \rangle,$$

что означает совпадение конгруэнций ρ_{B_d} и ρ_B . $\square$

Лемма 2.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существуют элементы $d \in A$, $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ эквива-

лентны в $\langle A, \eta \rangle$. Тогда для любого $t \geq 1$ существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что эквивалентны последовательности $\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)}$ и

$$b_1 \dots b_{n-1}.$$

Доказательство. Из эквивалентности в $\langle A, \eta \rangle$ последовательностей $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$

следует эквивалентность в $\langle A, \eta \rangle$ последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)} \text{ и } \underbrace{c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1}}_t,$$

а значит и последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)} \text{ и } c_1 \dots c_{n-2} \underbrace{\eta(c_{n-1} c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1})}_{t-1},$$

то есть последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{t(n-1)} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1},$$

где

$$\begin{aligned} b_1 &= c_1, \dots, b_{n-2} = c_{n-2} \in B, \\ b_{n-1} &= \eta(c_{n-1} \underbrace{c_1 \dots c_{n-1} \dots c_1 \dots c_{n-1}}_{t-1}) \in B. \quad \square \end{aligned}$$

Покажем, что замена в теореме 2.1 последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ последовательностью $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$

делает полуинвариантную в $\langle A, \mu \rangle$ l -арную подгруппу $\langle B_d, \mu \rangle$ n -полуинвариантной в $\langle A, \mu \rangle$.

Теорема 2.2. Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$; существуют элементы $d \in A$, $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$

эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$ в смысле Поста. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1 и, кроме того, полуинвариантная в $\langle A, \mu \rangle$ l -арная подгруппа $\langle B, \mu \rangle$ – n -полуинвариантна в ней.

Доказательство. По лемме 2.1 существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что эквивалентны последовательности

$$\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1} \text{ и } b_1 \dots b_{n-1}.$$

Таким образом, выполняются все условия теоремы 2.1 и справедливы утверждения 1) – 3) этой теоремы.

Если x – произвольный элемент из A , то, применяя полуинвариантность $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$, получим

$$\begin{aligned} \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) &= \\ &= \eta(\underbrace{\eta(d B \dots B)}_{n-1} \dots \underbrace{\eta(d B \dots B)}_{n-1} x) = \\ &= \eta(\underbrace{d B \dots B}_{n-1} \dots \underbrace{d B \dots B}_{n-1} x) = \\ &= \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{(i-1)(n-1)^2} \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{(s+1-i)(n-1)^2}) = \\ &= \eta(\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1} x \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-1}) = \\ &= \eta(\underbrace{\eta(d \dots d B)}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-2} x \underbrace{\eta(d \dots d B)}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-2}), \end{aligned}$$

то есть

$$\begin{aligned} & \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \\ & = \eta(\underbrace{\eta(d \dots d B)}_{(i-1)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-2} x \underbrace{\eta(d \dots d B)}_{(s+1-i)(n-1)} \underbrace{B \dots B}_{n-2}). \end{aligned}$$

Так как по лемме 2.1 каждая из последовательностей

$$\underbrace{d \dots d}_{(i-1)(n-1)} \text{ и } \underbrace{d \dots d}_{(s+1-i)(n-1)}$$

эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$ некоторым последовательностям, составленным из элементов множества B , то последнее равенство принимает вид

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1} x \underbrace{B \dots B}_{n-1}),$$

откуда и из полуинвариантности $\langle B, \eta \rangle$ в $\langle A, \eta \rangle$ следует

$$\mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(i-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s+1-i)(n-1)}) = \eta(\underbrace{B \dots B}_{n-1}) \quad (2.7)$$

для любого $i = 1, \dots, s+1$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu(\underbrace{x B_d \dots B_d}_{l-1}) &= \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{n-1} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{(s-1)(n-1)}) = \dots \\ &= \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{(s-1)(n-1)} x \underbrace{B_d \dots B_d}_{n-1}) = \mu(\underbrace{B_d \dots B_d}_{l-1} x). \end{aligned}$$

Следовательно, $\langle B_d, \mu \rangle$ является n -полуинвариантной в $\langle A, \mu \rangle$. $\square$

Лемма 2.2. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$,

$$s \geq 1, l = s(n-1) + 1.$$

Тогда:

1) если существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$, то

$$\eta(\underbrace{d \dots d B}_{l-1}) = B; \quad (2.8)$$

2) если существует элемент $d \in A$ такой, что верно (2.8), то существует последовательность $b_1 \dots b_{n-1}$ такая, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) Так как последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в

$\langle A, \eta \rangle$, то

$$\eta(\underbrace{d \dots d b}_{l-1}) = \eta(b_1 \dots b_{n-1} b)$$

для любого $b \in B$, откуда и из условия $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ следует

$$\begin{aligned} \eta(\underbrace{d \dots d B}_{l-1}) &= \{ \eta(\underbrace{d \dots d b}_{l-1}) \mid b \in B \} = \\ &= \{ \eta(b_1 \dots b_{n-1} b) \mid b \in B \} = B. \end{aligned}$$

Следовательно, верно (2.8).

2) $\Rightarrow$ 1) Так как верно (2.8), то для любого $b \in B$ существует $c \in B$ такой, что

$$\eta(\underbrace{d \dots d b}_{l-1}) = c.$$

А так как $b \in B$, $c \in B$, то существуют элементы $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что

$$\eta(b_1 \dots b_{n-1} b) = c.$$

Из последних двух равенств следует

$$\eta(\underbrace{d \dots d b}_{l-1}) = \eta(b_1 \dots b_{n-1} b).$$

Следовательно, последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и

$b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$. $\square$

Лемма 3.1 позволяет в формулировке теоремы 2.1 заменить условие *существуют элементы* $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ и $b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в

$\langle A, \eta \rangle$ равносильным ему условием *существует элемент* $d \in A$ такой, что верно (2.8). В этом случае формулировка теоремы 2.1 примет следующий вид.

Теорема 2.3. Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$; существует элемент $d \in A$ такой, что $\eta(\underbrace{d \dots d B}_{l-1}) = B$. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1.

Замечание 2.2. Из леммы 2.2 при $s = 1$ следует, что условие *существуют элементы* $d \in A$, $c_1, \dots, c_{n-1} \in B$ такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и $c_1 \dots c_{n-1}$ эквивалентны в $\langle A, \eta \rangle$ равносильно условию *существует элемент* $d \in A$ такой, что $\eta(\underbrace{d \dots d B}_{n-1}) = B$. Поэтому теорему 2.2

можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 2.4. Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$; существует элемент $d \in A$ такой, что $\eta(\underbrace{d \dots d B}_{n-1}) = B$. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1 и, кроме того, полуинвариантная в $\langle A, \mu \rangle$ l -арная подгруппа $\langle B, \mu \rangle$ – n -полуинвариантна в ней.

3 Следствия

Согласно Посту [5], v -ой n -адической степени элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется элемент этой же n -арной группы, обозначаемый символом $a^{[v]}$ и определяемый следующим образом:

$$\begin{aligned} a^{[v]} &= a, \text{ если } v = 0; \\ a^{[v]} &= \eta(\underbrace{a \dots a}_{v(n-1)+1}), \text{ если } v > 0; \end{aligned}$$

$a^{[v]}$ – решение уравнения $\eta(\underbrace{x a \dots a}_{-v(n-1)}) = a$, если $v < 0$.

Замечание 3.1. В группе полиадическая степень и обычная степень одного и того же элемента связаны равенством $a^{[v]} = a^{v+1}$ для любого целого v . В частности, $a^{[0]} = a^1 = a$.

Напомним, что конечным n -адическим порядком элемента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ называется [1], [5] наименьшее целое положительное число m , для которого выполняется равенство $a^{[m]} = a$.

Пост доказал [5], что если элемент a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ имеет конечный n -адический порядок m , то $a^{[s]} = a$ тогда и только тогда, когда s кратно m .

Теорема 3.1. Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$; элемент $d \in A$ имеет n -адический порядок, делящий s . Тогда справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1.

Доказательство. Так как элемент $d \in A$ имеет n -адический порядок, делящий s , то $d^{[s]} = d$, откуда согласно определению n -адической степени, следует

$$\eta(\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)+1}) = d,$$

что означает нейтральность в $\langle A, \eta \rangle$ последовательности

$$\underbrace{d \dots d}_{s(n-1)} = \underbrace{d \dots d}_{l-1}.$$

Понятно, что эта последовательность будет нейтральной и в $\langle B, \eta \rangle$. А так как в $\langle B, \eta \rangle$ существуют нейтральные последовательности, составленные из элементов множества B , и при этом все нейтральные последовательности любой n -арной группы эквивалентны в смысле Поста, то последовательность $\underbrace{d \dots d}_{l-1}$ эквивалентна

некоторой последовательности $b_1 \dots b_{n-1}$, где $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$. Так как выполняются все условия теоремы 2.1, то справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1. $\square$

Так как для идемпотента d n -арной группы выполняются условия теорем 2.2 и 2.4, то имеет место следующий результат.

Теорема 3.2. Пусть $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$; d – идемпотент в $\langle A, \eta \rangle$. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1, и, кроме того, полуинвариантная в $\langle A, \mu \rangle$ l -арная подгруппа $\langle B, \mu \rangle$ – n -полуинвариантна в ней.

Полагая в теоремах 2.1 и 2.2 $s = 1$, получим одно и то же

Следствие 3.1. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, существуют элементы $d \in A$, $b_1, \dots, b_{n-1} \in B$

такие, что последовательности $\underbrace{d \dots d}_{n-1}$ и

$b_1 \dots b_{n-1}$ эквивалентны в смысле Поста. Тогда:

1) смежный класс B_d n -арной факторгруппы $\langle A/B, \eta \rangle$ замкнут относительно n -арной операции η , а универсальная алгебра $\langle B_d, \eta \rangle$ является полуинвариантной n -арной подгруппой n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$;

2) $\langle A/B_d, \eta \rangle = \langle A/B, \eta \rangle$;

3) $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Полагая в теоремах 3.1 и 3.2 $s = 1$, получим одно и то же

Следствие 3.2. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная n -арная подгруппа n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, d – идемпотент в $\langle A, \eta \rangle$. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) следствия 3.1.

Замечание 3.2. Утверждения 1) и 2) следствия 3.2 доказаны в [4, предложение 7.6].

Полагая в теореме 2.1 $n = 2$, получим

Следствие 3.3. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – нормальная подгруппа группы A , $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от группы A ; существует элемент $d \in A$ такой, что $d^{l-1} \in B$. Тогда:

1) смежный класс $B_d = dB = Bd$ факторгруппы A/B замкнут относительно l -арной операции μ , а универсальная алгебра $\langle B_d, \mu \rangle$ является полуинвариантной l -арной подгруппой l -арной группы $\langle A, \mu \rangle$;

2) для полуинвариантных в $\langle A, \mu \rangle$ l -арных подгрупп $\langle B_d, \mu \rangle$ и $\langle B, \mu \rangle$ l -арные факторгруппы $\langle A/B_d, \mu \rangle$ и $\langle A/B, \mu \rangle$ совпадают: $\langle A/B_d, \mu \rangle = \langle A/B, \mu \rangle$;

3) конгруэнции ρ_{B_d} и ρ_B l -арной группы $\langle A, \eta \rangle$, определяемые полуинвариантными l -арными подгруппами $\langle B_d, \mu \rangle$ и $\langle B, \mu \rangle$ совпадают: $\rho_{B_d} = \rho_B$.

Если элемент $d \in A$ имеет в группе A порядок, делящий $l-1$, то $d^{l-1} = e$, где e – единица группы A . Поэтому из следствия 3.3 вытекает

Следствие 3.4. Пусть $\langle B, \eta \rangle$ – нормальная подгруппа группы A , $\langle A, \mu \rangle$ – l -арная группа, производная от группы A ; элемент $d \in A$ имеет в группе A порядок, делящий $l-1$. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) следствия 3.3.

Полагая в теореме 3.2 $n = 3$, получим

Следствие 3.5. Пусть $s \geq 1$, $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$, $\langle A, \mu \rangle$ – $(2s+1)$ -арная группа, производная от тернарной группы $\langle A, \eta \rangle$; d – идемпотент из A , $B_d = \eta(dBB)$. Тогда справедливы утверждения 1) – 3) теоремы 2.1 для $l = s+1$, и, кроме того, полуинвариантная в $\langle A, \mu \rangle$ $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B, \mu \rangle$ – 3-полуинвариантна в ней.

Пример 3.1. В [4, теорема 1.20, предложение 5.9] установлено, что в тернарной группе отражений правильного n -угольника $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$

все элементы являются идемпотентами и для всякого делителя k её порядка n существует точно $m = n/k$ полуинвариантных тернарных подгрупп

$$\langle H_1, \eta \rangle, \dots, \langle H_m, \eta \rangle$$

порядка k . Тогда по следствию 3.5 для $(2s+1)$ -арной группы $\langle \mathbf{B}_n, \mu \rangle$, производной от тернарной группы $\langle \mathbf{B}_n, \eta \rangle$, справедливы следующие утверждения:

1) для любого $i = \{1, \dots, m\}$ смежный класс $(H_i)_d = \eta(dH_iH_i)$ тернарной факторгруппы $\langle \mathbf{B}_n / H_i, \eta \rangle$ замкнут относительно $(2s+1)$ -арной операции μ , а универсальная алгебра $\langle (H_i)_d, \mu \rangle$ является 3-полуинвариантной $(2s+1)$ -арной подгруппой $(2s+1)$ -арной группы $\langle A, \mu \rangle$;

$$2) \langle \mathbf{B}_n / (H_i)_d, \mu \rangle = \langle \mathbf{B}_n / H_i, \mu \rangle;$$

$$3) \rho_{(H_i)_d} = \rho_{H_i}.$$

В теоремах 2.1 и 2.2 доказано, что l -арная подгруппа $\langle B_d, \mu \rangle$ полуинвариантна в $\langle A, \mu \rangle$, а в теоремах 2.3 и 2.4 установлено, что она может быть даже n -полуинвариантной. Покажем, что l -арная подгруппа $\langle B_d, \mu \rangle$ из теорем 2.1 – 2.2 не обязана быть инвариантной в $\langle A, \mu \rangle$.

Пример 3.2. Пусть $\mathbf{T}_k$ – множество всех нечётных подстановок степени k . $\langle \mathbf{T}_k, \mu \rangle$ – полиадическая группа нечётной арности $2s+1$, производная от тернарной группы $\langle \mathbf{T}_k, \eta \rangle$ с тернарной операцией $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$.

Рассмотрим одноэлементное множество $B = \{b\}$, где b – любая транспозиция из $\mathbf{T}_k$. Ясно, что $\langle B, \eta \rangle$ – полуинвариантная тернарная подгруппа тернарной группы $\langle \mathbf{T}_k, \eta \rangle$.

Если d – ещё одна транспозиция из $\mathbf{T}_k$, то

$$B_d = \eta(dBB) = \{dbb\} = \{d\}.$$

Так как d – идемпотент в $\langle \mathbf{T}_k, \mu \rangle$, то по теореме 3.2 $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B_d = \{d\}, \mu \rangle$ является 3-полуинвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle \mathbf{T}_k, \mu \rangle$. Это можно доказать и без использования теоремы 3.2, проведя соответствующие вычисления.

Если теперь $d = (ij)$ и $b = (ik)$ – различные транспозиции из $\mathbf{T}_k$, то, полагая $B = \{(ik)\}$, получим $B_d = \{(ij)\}$. Так как

$$\mu((ik) \underbrace{B_d \dots B_d}_{2s}) = \{(ik)(ij) \dots (ij)\} = \{(ik)\},$$

$$\begin{aligned} \mu(B_d(ik) \underbrace{B_d \dots B_d}_{2s-1}) &= \eta(B_d(ik)B_d) = \\ &= \{(ij)(ik)(ij)\} = \{(jk)\}, \end{aligned}$$

то

$$\mu((ik) \underbrace{B_d \dots B_d}_{2s}) \neq \mu(B_d(ik) \underbrace{B_d \dots B_d}_{2s-1}).$$

Следовательно, $(2s+1)$ -арная подгруппа $\langle B_d = \{d\}, \mu \rangle$, где $B = \{(ik)\}$, $d = (ij)$, $j \neq k$, не является инвариантной в $(2s+1)$ -арной группе $\langle \mathbf{T}_k, \mu \rangle$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Русаков, С.А. Алгебраические n -арные системы / С.А. Русаков. – Минск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.
2. Dörnte, W. Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff // W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
3. Гальмак, А.М. Инвариантные подгруппы n -арных групп / А.М. Гальмак // Вопросы алгебры. – Минск: Университетское. – 1990. – Вып. 5. – С. 91–94.
4. Гальмак, А.М. Конгруэнции полиадических групп / А.М. Гальмак. – Минск: Беларуская навука, 1999. – 182 с.
5. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.

Поступила в редакцию 05.03.2025.

Информация об авторах

Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор