КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Том 21 1976 Вып. 3

УДК 548.0:535.52

Б. В. БОКУТЬ, С. С. ГИРГЕЛЬ

ОПТИЧЕСКИЕ ОСИ В ФЕРРИТАХ-ГРАНАТАХ С УЧЕТОМ НЕКОЛЛИНЕАРНОСТИ ПОДРЕШЕТОК

Проведено феноменологическое рассмотрение задачи о распространении плоских электромагнитных волн в ферритах-гранатах с учетом неколлинеарности подрешеток. Найдены направления оптических осей для случаев расположения магнитных моментов подрешеток в плоскостях симметрии кристалла. Определены условия, при которых кристалл под действием магнитного упорядочения становится одноосным или остается изотропным.

1. Как известно [1, 2], под действием магнитного упорядочения в кубических редкоземельных ферритах-гранатах возникает индуцированное двупреломление. При этом оптическая индикатриса деформируется и кубический кристалл превращается в общем случае в двуосный. В [3], исходя из одноподрешеточной модели, рассматривалось магнитное двупреломление и ориентация индуцированных оптических осей для направлений магнитного момента, параллельных кристаллографическим осям. Поляризация плоских электромагнитных волн для некоторых частных случаев определялась в [4, 5]. В [6] эти вопросы были рассмотрены для произвольного направления намагничивания.

Однако во многих случаях (вблизи температуры компенсации, в сильных магнитных полях и т. д.) необходимо учитывать неколлинеарность подрешеток. Тогда двухподрешеточная модель более адекватно описывает магнитооптические явления в редкоземельных ферритах-гранатах. Распространение электромагнитных волн в этих кристаллах в неколлинеарной фазе рассматривалось в [7], но лишь в приближении изотропной среды.

В настоящей работе исследуются особенности распространения электромагнитных волн в редкоземельных ферритах-гранатах в неколлинеарной фазе при помощи двухподрешеточной модели при произвольных направлениях магнитных моментов подрешеток в плоскостях симметрии кристалла.

2. Тензор обратной диэлектрической проницаемости прозрачного кубического двухподрешеточного ферримагнетика можно разделить на симметричную χ и антисимметричную $i\mathbf{G}^{\times}$ части

$$\varepsilon^{-1}=\chi+i\mathbf{G}^{\times}, \tag{1}$$

причем тензор χ и вектор гирации $\mathbf{G}$ можно представить в виде [2]

$$\chi_{ik}=(\chi_0)_{ik}+\overset{(1)}{\pi}_{iklm}e_le_m+\overset{(2)}{\pi}_{iklm}n_ln_m+\overset{(3)}{\pi}_{iklm}(e_ln_m+e_mn_l), \tag{2}$$

$$G_i=\mu_1e_i+\mu_2n_i, \tag{3}$$

где $\mathbf{e}$, $\mathbf{n}$ — единичные векторы намагниченности, направленные вдоль магнитных моментов подрешеток.

Рассмотрим случай, когда векторы $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n}$, расположенные в плоскости (y, z) составляют с осью z углы φ_1 и φ_2 соответственно (координатные оси совпадают с осями симметрии четвертого порядка).

Тогда χ можно записать в следующей форме:

$$\chi=\chi^0+\chi', \tag{4}$$

где

$$\chi^0=\chi_0+\overset{(1)}{\pi}_{1122}+\overset{(2)}{\pi}_{1122}+\overset{(3)}{\pi}_{1122}, \tag{4a}$$

а компоненты тензора χ' задаются выражениями

$$\begin{gathered}\chi_{11}'=\chi_{12}'=\chi_{13}'=0, \quad \chi_{22}'=\pi_1 \sin^2\varphi_1+\pi_2 \sin_2\varphi_2+\pi_3 \sin\varphi_1 \sin\varphi_2,\\ \chi_{33}'=\pi_1\cos^2\varphi_1+\pi_2\cos^2\varphi_2+\pi_3\cos\varphi_1\cos\varphi_2,\\ \chi_{23}'=[\tau_1\sin 2\varphi_1+\tau_2\sin 2\varphi_2+\tau_3\sin(\varphi_1+\varphi_2)]/2.\end{gathered} \tag{5}$$

В (5) для краткости осуществлен переход от четырехиндексных обозначений к сокращенным

$$\overset{(i)}{\pi}_{1111}-\overset{(i)}{\pi}_{1122}=\pi_i, \quad \overset{(3)}{\pi}_{1111}-\overset{(3)}{\pi}_{1122}=\pi_3/2, \quad \overset{(i)}{\pi}_{2323}=\tau_i, \quad \overset{(3)}{\pi}_{2323}=\tau_3/2, \quad i=1,2. \tag{6}$$

Для удобства дальнейшего рассмотрения введем обозначения

$$\begin{gathered}u=\chi_{22}'+\chi_{33}'=\pi_1+\pi_2+\pi_3\cos\omega, \quad \varphi_2-\varphi_1=\omega,\\ t=\chi_{33}'-\chi_{22}'=\pi_1\cos 2\varphi_1+\pi_2\cos 2\varphi_2+\pi_3\cos(\varphi_1+\varphi_2),\\ s=\pi_1\sin 2\varphi_1+\pi_2\sin 2\varphi_2+\pi_3\sin(\varphi_1+\varphi_2),\\ v_1=(\pi_3^2-4\pi_1\pi_2)\sin^2\omega, \quad v=4(\chi_{23}'^2-\chi_{22}'\chi_{33}').\end{gathered} \tag{7}$$

Нетрудно проверить, что

$$4\chi_{22}'\chi_{33}'=s^2-v_1, \quad u_2+v=t^2+4\chi_{23}'^2.$$

Поворотом системы координат вокруг оси x на угол ψ, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg} 2\psi=-2\chi_{23}'/t, \tag{8}$$

тензор χ' приводится к диагональному виду

$$\chi'=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \chi_{22}'' & 0\\ 0 & 0 & \chi_{33}''\end{pmatrix}, \tag{9}$$

где

$$\chi_{22,33}''=u\mp w\sqrt{u^2+v}, \quad w=\operatorname{sign} t, \tag{10}$$

а вектор гирации $\mathbf{G}$ будет равен

$$\mathbf{G}=\{0;\ \mu_1\sin(\varphi_1+\psi)+\mu_2\sin(\varphi_2+\psi);\ \mu_1\cos(\varphi_1+\psi)+\mu_2\cos(\varphi_2+\psi)\}. \tag{11}$$

Выражения (8)–(11) всегда справедливы, за исключением двух случаев:

а) $t=0$; в (8) следует положить $\psi=-45°$, а $w=\operatorname{sign}\chi_{23}'$;

б) $t=\chi_{23}'=0$; это означает, что угол ψ является произвольным, а χ превращается в одноосный тензор с осью **c**, параллельной оси x.

3. Сейчас нетрудно определить направления оптических осей кристалла. Они лежат в плоскости собственных векторов тензора χ, отвечающих наибольшим и наименьшим собственным значениям, а угол θ между ними определяется из соотношения [3]

$$\operatorname{tg}^2(\theta/2)=(\chi_g-\chi_m)/(\chi_m-\chi_p), \tag{12}$$

где χ_g, χ_m, χ_p — большее, среднее и меньшее собственное значение тензора χ соответственно. Из выражений (8)–(12) получаем условия превращения кубического кристалла в двуосный или одноосный под действием магнитного упорядочения, а также условия, при которых он остается изотропным (см. таблицу). Из таблицы видно, что условия одноосности и даже изотропности тензора χ могут выполняться при различных сочетаниях между параметрами кристалла π_j, τ_j, φ_1, φ_2. В случае изотропности (скалярности) χ квадратичная тензорная добавка χ' должна обращаться в нуль и остается лишь скалярная добавка $\chi^0-\chi_0=\pi^{(1)}_{1122}+\pi^{(2)}_{1122}+\pi^{(3)}_{1122}$, хотя все параметры π_j, τ_j, φ_1, φ_2 могут быть отличны от нуля.

Рассмотрим сейчас приближение изотропной среды, когда $\pi_j=\tau_j$, что может выполняться, в частности, вблизи температуры компенсации. Теперь $v=v_1$, $\chi_{23}'=s/2$.

Условия одноосности сводятся либо к $\pi_3^2-4\pi_1\pi_2=0$ при произвольном ω, либо к $\mathbf{e}\|\mathbf{n}$ при произвольных π_j, либо, наконец, к $\pi_1=\pi_2$, $\cos\omega=-\pi_3/(2\pi_1)$. В последнем случае $v<0$, оптическая ось $\mathbf{c}$ направлена вдоль оси x первоначальной системы координат. Тензор χ может быть изотропным лишь при $\mathbf{e}\|\mathbf{n}\|L^4$, $\pi_1+\pi_2+\pi_3=0$ либо при $\pi_1=\pi_2=\pi_3=0$.

Наконец, перейдем к условиям двуосности. При $v>0$, т. е. при $\pi_3^2-4\pi_1\pi_2>0$, $\omega\neq0$ оптические оси расположены в плоскости (y', z'), а при $v<0$, $u^2+v>0$ могут быть (см. таблицу) как в плоскости (x, z'), так и в плоскости (x, y'). Таким образом, при $v>0$ может выполняться не только неравенство $\chi_3<\chi_1<\chi_2$, но и $\chi_2<\chi_1<\chi_3$. При $v<0$ оптические оси также могут находиться не только в плоскости (x, z'), но и в плоскости (x, y') (см. [7]).

Как следует из (7), (11)—(13) угол θ между оптическими осями зависит от разности углов $\omega=\varphi_2-\varphi_1$, а не от каждого угла в отдельности.

Найдем максимальную величину $\mathrm{tg}^2(\theta/2)$ в зависимости от ω. Условие экстремальности $\mathrm{tg}^2(\theta/2)$ в зависимости от какого-либо параметра σ при произвольных собственных значениях α_1, α_2, α_3 симметричного тензора второго ранга α задается выражением

$$\frac{\partial(\alpha_2-\alpha_1)}{\partial\sigma}\alpha_3+\frac{\partial(\alpha_1-\alpha_3)}{\partial\sigma}\alpha_2+\frac{\partial(\alpha_3-\alpha_2)}{\partial\sigma}\alpha_1=0, \tag{13}$$

что для общего случая (7)—(12) сводится к виду

$$2v\frac{\partial u}{\partial\omega}-u\frac{\partial v}{\partial\omega}=0, \tag{14}$$

а для приближения изотропной среды дает

$$(\pi_3^2-4\pi_1\pi_2)[\pi_3+(\pi_1+\pi_2)\cos\omega]=0. \tag{15}$$

При $\pi_3^2-4\pi_1\pi_2=0$ угол $\theta=\theta_{\min}=0$, т. е. тензор χ является одноосным. Если же χ двуосен, то из (15) следует [7]

$$\cos\omega=-\pi_3/(\pi_1+\pi_2), \tag{16}$$

что при $v>0$ и при $v<0$, $u^2+v<0$ дает соответственно (для $u<0$)

$$\mathrm{tg}^2(\theta_{\max}/2)=\frac{|\pi_1-\pi_2|+\mathrm{sign}(\pi_1+\pi_2)[(\pi_1+\pi_2)^2-\pi_3^2]^{1/2}}{|\pi_1-\pi_2|-\mathrm{sign}(\pi_1+\pi_2)[(\pi_1+\pi_2)^2-\pi_3^2]^{1/2}}, \tag{17}$$

$$2\mathrm{tg}^2(\theta_{\max}/2)=\frac{[(\pi_1+\pi_2)^2-\pi^2]^{1/2}}{|\pi_1-\pi_2|}-1. \tag{18}$$

В случае $u>0$ в (17), (18) следует заменить $\mathrm{tg}^2(\theta/2)$ на $\mathrm{ctg}^2(\theta/2)$.

4. Рассмотрим практически важный случай, когда векторы намагничения $\mathbf{e}$ и $\mathbf{n}$ отклоняются от оси [111] на одинаковые по величине, но противоположные по знаку углы, т. е. $\varphi_2=-\varphi_1=\varphi$. Тогда

$$\begin{gathered}\chi_{22}'=(\pi_1+\pi_2-\pi_3)\sin^2\varphi,\quad \chi_{33}'=(\pi_1+\pi_2+\pi_3)\cos^2\varphi,\\ \chi_{23}'=(\tau_2-\tau_1)\sin\varphi\cos\varphi,\quad u=\pi_1+\pi_2+\pi_3\cos2\varphi,\\ t=\pi_3+(\pi_1+\pi_2)\cos2\varphi,\quad v=v_2\sin^2 2\varphi,\quad v_2=(\tau_2-\tau_1)^2+\pi_3^2-(\pi_1+\pi_2)^2,\\ \mathrm{tg}\,2\varphi=[(\tau_2-\tau_1)\sin2\varphi]/[(\pi_1+\pi_2)\cos2\varphi+\pi_3].\end{gathered} \tag{19}$$

Если кристалл двуосен, то, как и для приближения изотропной среды, условия максимальности $\mathrm{tg}^2(\theta/2)$ реализуются при выполнении соотноше-

Оптические оси в кристалле

Вид тензора χ	Условия двуосности, одноосности или изотропности χ	Дополнительные ограничения	Соотношение между главными значениями тензора χ	Расположение оптических осей
Двуосный	$v>0$	$w>0$ $w<0$	$\chi_2<\chi_1<\chi_3$ $\chi_3<\chi_1<\chi_2$	в плоскости (y', z')
	$u^2+v>0$,	$uw>0$ $\left\vert\begin{matrix} u>0 \\ u<0 \end{matrix}\right.$	$\chi_1<\chi_2<\chi_3$ $\chi_3<\chi_2<\chi_1$	в плоскости (x, z')
	$v<0$	$uw<0$ $\left\vert\begin{matrix} u>0 \\ u<0 \end{matrix}\right.$	$\chi_1<\chi_3<\chi_2$ $\chi_2<\chi_3<\chi_1$	в плоскости (x, y')
Одноосный	$v=0$ $u\neq 0$	$uw>0$ $uw<0$	$\chi_1=\chi_2$ $\chi_1=\chi_3$	$\mathbf{c}\parallel z'$ $\mathbf{c}\parallel y'$
	$u^2+v=0,\ u\neq 0$	—	$\chi_2=\chi_3$	$\mathbf{c}\parallel x$
Изотропный	$u=w=0$	—	$\chi_1=\chi_2=\chi_3$	—

ния (16), причем при $v>0$

$$\operatorname{tg}^2(\theta_{\max}/2)=\frac{|\tau_2-\tau_1|+\operatorname{sign}(\pi_1+\pi_2)\,[(\pi_1+\pi_2)^2-\pi_3^2]^{1/2}}{|\tau_2-\tau_1|-\operatorname{sign}(\pi_1+\pi_2)\,((\pi_1+\pi_2)^2-\pi_3^2]^{1/2}}. \tag{20}$$

Если же $v<0$, $u^2+v>0$, то для $u>0$ и $u<0$ получаем соответственно

$$2\operatorname{ctg}^2(\theta_{\max}/2)=\frac{[(\pi_1+\pi_2)-\pi_3^2]^{1/2}}{|(\pi_1+\pi_2)(\tau_1-\tau_2)|}-1, \tag{21}$$

$$2\operatorname{tg}^2(\theta_{\max}/2)=\frac{[(\pi_1+\pi_2)^2-\pi_3^2]^{1/2}}{|\tau_2-\tau_1|}+1. \tag{22}$$

Кристалл может быть одноосным: а) при $v_2=0$ (φ произвольное); б) $\mathbf{e}\|\mathbf{n}\|L^4$, что тривиально; в) при $\tau_1=\tau_2$, $\cos 2\varphi=-\pi_3/(\pi_1+\pi_2)$, тогда ось $\mathbf{c}\|x$. Кристалл остается изотропным (по χ) лишь при $\mathbf{e}\|\mathbf{n}\|L^4$, $\pi_1+\pi_2+\pi_3=0$ или, если $\pi_3=\pi_1+\pi_2=\tau_2-\tau_1=0$, при произвольном φ.

5. Пусть два единичных вектора магнитных подрешеток **e** и **n**, расположенные в плоскости [110], составляют с осью z углы φ_1 и φ_2 соответственно. Поворотом системы координат (x, y, z) вокруг оси z до совмещения оси x с направлением [110] получаем для тензора χ

$$\chi=\chi^0+\chi'/2,\qquad \chi^0=\chi_0+\pi_{1122}^{(1)}+\pi_{1122}^{(2)}+\pi_{1122}^{(3)}\cos\omega,$$
$$\omega=\varphi_2-\varphi_1, \tag{23}$$

причем компоненты тензора χ' задаются выражениями

$$\begin{gathered}\chi_{11}'=(\pi_1-\tau_1)\sin^2\varphi_1+(\pi_2-\tau_2)\sin^2\varphi_2+(\pi_3-\tau_3)\sin\varphi_1\sin\varphi_2,\\ \chi_{22}'=(\pi_1+\tau_1)\sin^2\varphi_1+(\pi_2+\tau_2)\sin^2\varphi_2+(\pi_3+\tau_3)\sin\varphi_1\sin\varphi_2,\\ \chi_{23}'=-[\tau_1\sin 2\varphi_1+\tau_2\sin 2\varphi_2+\tau_3\sin(\varphi_1+\varphi_2)],\qquad \chi_{13}'=\chi_{12}'=0,\\ \chi_{33}'=2(\pi_1\cos^2\varphi_1+\pi_2\cos^2\varphi_2+\pi_3\cos\varphi_1\cos\varphi_2).\end{gathered} \tag{24}$$

Чтобы привести теперь тензор χ' к главным осям, повернем полученную систему координат (x', y', z) вокруг оси x' на угол ψ, определяемый соотношением

$$\operatorname{tg}2\psi=2\chi_{23}'/(\chi_{22}'-\chi_{33}'). \tag{25}$$

Тогда χ' можно записать в форме

$$\chi'=\chi_{11}'+\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&\chi_{22}''&0\\0&0&\chi_{33}''\end{pmatrix},\quad \chi_{22,23}''=u\mp w\sqrt{u^2+v}, \tag{26}$$

где введены обозначения

$$u=\chi_{22}'+\chi_{33}'-2\chi_{11}', \qquad v=4[\chi_{23}'-(\chi_{22}'-\chi_{33}')(\chi_{33}'-\chi_{11}')], \tag{26a}$$

$$w=\begin{cases}\mathrm{sign}\,t, & \text{если } t\neq 0;\\ \mathrm{sign}\,\chi_{23}', & \text{если } t=0;\end{cases} \quad t=\chi_{33}'-\chi_{22}'.$$

Общее рассмотрение (см. таблицу) теперь полностью применимо и к данному случаю. Из-за громоздкости выражений для u, v и t в явном виде их выписывать не будем. Не останавливаясь более на общем случае, кратко рассмотрим некоторые наиболее важные частные случаи.

Магнитные моменты подрешеток расположены симметрично относительно оси [001], т. е. $\varphi_2=-\varphi_1=\varphi$. Здесь удобно ввести обозначения

$$\pi_1+\pi_2+\pi_3=\lambda_1, \quad \pi_1+\pi_2-\pi_3=\lambda_2, \quad \tau_1+\tau_2-\tau_3=\lambda_3, \quad \tau_3-\tau_2=\lambda_4 \tag{27}$$

тогда

$$\begin{gathered}\chi_{11}'=(\lambda_2-\lambda_3)\sin^2\varphi,\ \chi_{22}'=(\lambda_2+\lambda_3)\sin^2\theta,\ \chi_{23}'=(\lambda_2+\lambda_3)\sin^2\varphi,\\ \chi_{33}'=2\lambda_1\cos^2\varphi,\\ v=8\sin^2\varphi[2(\lambda_4^2-\lambda_1\lambda_3)\cos^2\varphi+\lambda_3(\lambda_3-\lambda_2)\sin^2\varphi],\\ u=2\lambda_1+(3\lambda_2-2\lambda_1-\lambda_2)\sin^2\varphi,\ t=2\lambda_1\cos^2\varphi-(\lambda_2+\lambda_3)\sin^2\varphi.\end{gathered} \tag{28}$$

Кристалл может быть одноосным лишь в следующих семи случаях: 1) $\lambda_1=\lambda_2+\lambda_3=\lambda_4=0$; 2) $\lambda_3=\lambda_4$; 3) $\lambda_2=\lambda_3$, $\lambda_4-\lambda_1\lambda_2=0$; 4) $\varphi=0$; 5) $\varphi=\pm\pi/2$, $\lambda_2+\lambda_3=0$; 6) $\mathrm{tg}^2\varphi=2(\lambda_4^2-\lambda_1\lambda_3)/(\lambda_2-\lambda_3)\lambda_3$; 7) $\lambda_4=0$, $\mathrm{tg}^2\varphi=2\lambda_1/(\lambda_2+\lambda_3)$. А изотропным — в следующих четырех: 1) $\varphi=0$, $\lambda_1=0$; 2) $\varphi=\pm\pi/2$, $\lambda_2=\lambda_3=0$; 3) $\lambda_3=\lambda_4=0$, $\mathrm{tg}^2\varphi=2\lambda_1/\lambda_2$; 4) $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4$ (φ — произвольный).

Условие экстремума угла между оптическими осями (14) после подстановки u, v и соответствующих преобразований сводится к виду

$$\sin^2\varphi=\frac{2\lambda_1(\lambda_4^2-\lambda_1\lambda_2)}{\lambda_4^2(3\lambda_3-\lambda_2+2\lambda_1)-\lambda_1\lambda_2(2\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)}. \tag{29}$$

Легко заметить, что случай приближения изотропной среды (т. е. $\pi_i=\tau_i$) эквивалентен предыдущему, рассмотренному в разделе 3, что совершенно естественно из-за отсутствия в изотропной среде выделенных направлений.

Литература

1. J. F. Dillon, Jr., J. R. Remeika, G. R. Staton. J. Appl. Phys., **40**, 1510, 1969.
2. Р. В. Писарев, И. Г. Синий, Г. А. Смоленский. Ж. эксперим. и теор. физ., **57**, 737, 1969.
3. Р. В. Писарев, И. Г. Синий, Н. Я. Колпакова, Ю. М. Яковлев. Ж. эксперим. и теор. физ., **60**, 2188, 1971.
4. Ф. В. Лисовский. Оптика и спектроскопия, **34**, 947, 1973.
5. А. А. Соломко, В. М. Мыкитюк. Оптика и спектроскопия, **36**, 410, 1974.
6. Б. В. Бокуть, С. С. Гиргель. Кристаллография, **21**, 264, 269, 1976.
7. А. К. Звездин, М. И. Макаров, А. И. Попов и В. Г. Редько. Изв. АН СССР. Сер. физ., **36**, 1234, 1972.
8. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, М., 1959.

Гомельский государственный университет

Поступила в редакцию 11.III.1975